数学演習（等差数列･等比数列）Ｈ２３．１１．９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．第 59 項が 70，第 66 項が 84 の等差数列の一般項を求めよ。また，この数列において，初めて正になるのは第何項か。

2．5 と 9 の間にあって，7 を分母とする既約分数の総和を求めよ。なお，それ以上約分できない分数のことを既約分数をいう。

3．初項から第 5 項までの和が 445，初項から第 10 項までの和が 765 の等差数列がある。このとき

(1)　この等差数列の一般項を求めよ。

(2)　この等差数列の初項からの和が最大になるのは第何項までの和か。また，そのときの和を求めよ。

4．100 から 200 までの整数のうち，次の数の和を求めよ。

(1)　2 の倍数　　(2)　3 で割って 1 余る数

5．初項が 93，第 31 項が -57 である等差数列がある。この数列の各項の絶対値を項とする数列の第 40 項までの和を求めよ。

6．第 2 項が 48，第 5 項が 162 である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

7．異なる 3 つの数 6，x，$2x-6$ がある順序で等比数列になっている。このとき，x の値を求めよ。

8．(1)　等比数列 a，$3a^2$，$9a^3$，…… の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq 0$ とする。

(2)　等比数列 a_1，a_2，a_3，…… の初項から第 3 項までの和は 35，初項から第 6 項までの和は 315 である。この等比数列の一般項 a_n を求めよ。ただし，公比は実数とする。

9．初めの 10 項の和が 2，初めの 20 項の和が 6 である等比数列について

(1)　初項から第 30 項までの和を求めよ。

(2)　初項から第 40 項までの和を求めよ。

数学演習（等差数列•等比数列）Ｈ２３．１１．９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1. 第 59 項が 70，第 66 項が 84 の等差数列の一般項を求めよ。また，この数列において，初めて正になるのは第何項か。

解答　一般項は $2n-48$，初めて正になるのは 第 25 項

解説

初項を a，公差を d，一般項を a_n とすると，$a_{59}=70$，$a_{66}=84$ であるから

$a+58d=70$，$a+65d=84$　　これを解いて　$a=-46$，$d=2$

よって，一般項は　$a_n=-46+(n-1)\cdot 2=2n-48$

また，$a_n>0$ とすると，$2n-48>0$ であるから　$n>24$

したがって，初めて正になるのは 第 25 項。

2. 5 と 9 の間にあって，7 を分母とする既約分数の総和を求めよ。なお，それ以上約分できない分数のことを既約分数をいう。

解答　168

解説

5 と 9 の間にあって，7 を分母とする分数は

$\frac{36}{7}$，$\frac{37}{7}$，$\frac{38}{7}$，……，$\frac{62}{7}$　　……①

これは初項が $\frac{36}{7}$，末項が $\frac{62}{7}$，項数が 27 の等差数列であるから，① の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 27\left(\frac{36}{7}+\frac{62}{7}\right)=189$$

① のうち，整数になる数は，$\frac{42}{7}$，$\frac{49}{7}$，$\frac{56}{7}$　より

和は　$6+7+8=21$

したがって，求める和は　$189-21=168$

3. 初項から第 5 項までの和が 445，初項から第 10 項までの和が 765 の等差数列がある。このとき

(1)　この等差数列の一般項を求めよ。

(2)　この等差数列の初項からの和が最大になるのは第何項までの和か。また，そのときの和を求めよ。

解答　(1)　$-5n+104$　　(2)　第 20 項，和は 1030

解説

(1)　初項を a，公差を d とすると，条件から

$$\frac{1}{2}\cdot 5(2a+4d)=445,\ \frac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=765$$

ゆえに　$a+2d=89$，$2a+9d=153$　　これを解いて　$a=99$，$d=-5$

よって，一般項は　$a_n=99+(n-1)\cdot(-5)=-5n+104$

(2)　(1) より，初項が 99 で正，公差は -5 で負であるから，求める和が最大になるのは項がすべて正の数のときである。

$a_n=-5n+104>0$ とすると　$n<\frac{104}{5}=20.8$

ゆえに，$a_n>0$ を満たす最大の n は $n=20$ である。

よって，初項から第 20 項までの和が最大で，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 99+(20-1)\cdot(-5)\}=1030$$

4. 100 から 200 までの整数のうち，次の数の和を求めよ。

(1)　2 の倍数　　　　(2)　3 で割って 1 余る数

解答　(1)　7650　　(2)　5083

解説

(1)　100 から 200 までの 2 の倍数は　$2\cdot 50$，$2\cdot 51$，……，$2\cdot 100$

これは，初項 100，末項 200，項数 51 の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot 51(100+200)=7650$$

(2)　100 から 200 までで，3 で割って 1 余る数は　$3\cdot 33+1$，$3\cdot 34+1$，……，$3\cdot 66+1$

これは，初項が $3\cdot 33+1=100$，末項が $3\cdot 66+1=199$，項数が 34 の等差数列であるから，その和は　$\frac{1}{2}\cdot 34(100+199)=5083$

5. 初項が 93，第 31 項が -57 である等差数列がある。この数列の各項の絶対値を項とする数列の第 40 項までの和を求めよ。

解答　2004

解説

与えられた等差数列の一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n で表す。

公差を d とすると，$93+30d=-57$ から　$d=-5$

ゆえに　$a_n=93+(n-1)\cdot(-5)=-5n+98$

$a_n\leqq 0$ とすると　$-5n+98\leqq 0$　　よって　$n\geqq\frac{98}{5}=19.6$

ゆえに，a_1 から a_{19} までは正の数，a_{20} から負の数になるから，，求める和 S は

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{19})+\{-(a_{20}+a_{21}+\cdots\cdots+a_{40})\}$$
$$=S_{19}-(S_{40}-S_{19})=2S_{19}-S_{40}$$

となり，$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 93+(n-1)\cdot(-5)\}=\frac{1}{2}n(-5n+191)$　より

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 19\cdot(-5\cdot 19+191)-\frac{1}{2}\cdot 40\cdot(-5\cdot 40+191)$$
$$=1824-(-180)$$
$$=2004$$

別解　($d=-5$ 以降)

初項から第19項までの和Tは，第19項が$a_{19}=-5\cdot 19+98=3$ より

$$T=\frac{1}{2}\cdot 19\cdot(93+3)=912$$

また，第20項から第40項までについて，第20項から第40項までは21項の項があり、すべて負の値となるので

第20項は　$a_{20}=-5\cdot 20+98=-2$

第40項は　$a_{40}=-5\cdot 40+98=-102$

より，絶対値で考えると第20項は 2 となり，第40項は 102 となる。

したがって，第20項から第40項までの絶対値の和T'は，

初項2，末項102，項数21の等差数列の和なので

$$T'=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot(2+102)=1092$$

となる。以上より，求める和 S は，

$$S=T+T'=912+1092=2004$$

6. 第 2 項が 48，第 5 項が 162 である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答　$32\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

解説

与えられた等比数列の初項を a，公比を r，一般項を a_n とする。

$a_2=48$，$a_5=162$ から　$ar=48$ ……①，$ar^4=162$ ……②

② から　$ar\cdot r^3=162$　　① を代入して　$48r^3=162$

ゆえに　$r^3=\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$　　r は実数であるから　$r=\frac{3}{2}$

このとき，① から　$a=48\cdot\frac{2}{3}=32$　　したがって　$a_n=32\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

7. 異なる 3 つの数 6，x，$2x-6$ がある順序で等比数列になっている。このとき，x の値を求めよ。

解答　$x=-3$，$\frac{3}{2}$

解説

6，x，$2x-6$ は異なる数であるから　$6\fallingdotseq x$，$x\fallingdotseq 2x-6$，$2x-6\fallingdotseq 6$

よって　$x\fallingdotseq 6$

[1]　等比中項が 6 となるとき　　$36=x(2x-6)$

整理すると　　$x^2-3x-18=0$

ゆえに　　$(x+3)(x-6)=0$

$x\fallingdotseq 6$ であるから　　$x=-3$

[2]　等比中項が x となるとき　　$x^2=6(2x-6)$

整理すると　　$x^2-12x+36=0$

よって　　$(x-6)^2=0$

ゆえに，$x=6$ となり，これは不適。

[3]　等比中項が $2x-6$ となるとき　　$(2x-6)^2=6x$

整理すると　　$2x^2-15x+18=0$

よって　　$(x-6)(2x-3)=0$

$x\fallingdotseq 6$ であるから　　$x=\frac{3}{2}$

[1]，[2]，[3] から　　$x=-3$，$\frac{3}{2}$

8. (1)　等比数列 a，$3a^2$，$9a^3$，…… の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。ただし，$a\fallingdotseq 0$ とする。

(2)　等比数列 a_1，a_2，a_3，…… の初項から第 3 項までの和は 35，初項から第 6 項まで

の和は315である。この等比数列の一般項 a_n を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答　(1)　$a \neq \dfrac{1}{3}$ のとき $S_n=\dfrac{a\{1-(3a)^n\}}{1-3a}$，$a=\dfrac{1}{3}$ のとき $S_n=\dfrac{1}{3}n$

(2)　$a_n=5\cdot 2^{n-1}$

解説

(1)　初項が a，公比が $3a$ であるから

[1]　$3a \neq 1$ すなわち $a \neq \dfrac{1}{3}$ のとき　$S_n=\dfrac{a\{1-(3a)^n\}}{1-3a}$

[2]　$3a=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{3}$ のとき　$S_n=na=\dfrac{1}{3}n$

(2)　初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_3=35$，$S_6=315$ であるから　$r \neq 1$

よって　$\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=35$ ……①，$\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=315$ ……②

② から　$\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=315$　　① を代入して　$35(1+r^3)=315$

ゆえに　$r^3=8$　　r は実数であるから　$r=2$

このとき，① から　$7a=35$　　よって　$a=5$

したがって　$a_n=5\cdot 2^{n-1}$

別解　$a+ar+ar^2=35$ ……①，

$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5=315$ ……②

であり，②より

$(a+ar+ar^2)+r^3(a+ar+ar^2)=315$

として，①を代入すると

$35+r^3\cdot 35=315$　　よって　$r^3=8$　（以下同じ）

9．初めの10項の和が2，初めの20項の和が6である等比数列について

(1)　初項から第30項までの和を求めよ。

(2)　初項から第40項までの和を求めよ。

解答　(1)　14　　(2)　30

解説

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると，$S_{10}=10a$ となり　　$10a=2$

このとき，$S_{20}=20a=4 \neq 6$ であるから，条件を満たさない。

ゆえに　　$r \neq 1$

よって　　$\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}=2$　……①，　$\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}=6$　……②

$1-r^{20}=(1-r^{10})(1+r^{10})$ であるから，② より

$$\frac{a(1-r^{10})}{1-r}\cdot(1+r^{10})=6$$　　① を代入して　$2(1+r^{10})=6$

したがって　$1+r^{10}=3$　　すなわち　$r^{10}=2$　……③

(1)　$1-r^{30}=1-(r^{10})^3=(1-r^{10})\{1+r^{10}+(r^{10})^2\}$ であるから

$$S_{30}=\frac{a(1-r^{30})}{1-r}=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}\{1+r^{10}+(r^{10})^2\}$$

①，③ を代入して　　$S_{30}=2\cdot(1+2+2^2)=14$

(2)　$1-r^{40}=(1-r^{20})(1+r^{20})$ であるから

$$S_{40}=\frac{a(1-r^{40})}{1-r}=\frac{a(1-r^{20})}{1-r}\{1+(r^{10})^2\}$$

②，③ を代入して　　$S_{40}=6\cdot(1+2^2)=30$