数学演習（数列）Ｈ２１．１．２７　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．第７項が６，第１１項が－６である等差数列において，以下の問いに答えよ。

(1) この等差数列の一般項を求めよ。

(2) この数列の初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

２．第３項が１２，初項から第３項までの和が２１である等比数列の初項と公比を求めよ。

３．x, y は $0<x<y$ を満たすとする。数列 $68, y, x$ が等差数列で，数列 $x, 12, y$ が等比数列であるとき，x, y の値を求めよ。

４．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和S_n が $S_n=n^2+2n+3$ で表されるとき，この数列の一般項 a_n を求めよ。

５．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ。$5, 55, 555, 5555, \cdots\cdots$

６. 次の数列の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ。

(1) $2^2\cdot5,\ 4^2\cdot7,\ 6^2\cdot9,\ 8^2\cdot11,\ 10^2\cdot13,\ \cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot3},\ \dfrac{1}{3\cdot5},\ \dfrac{1}{5\cdot7},\ \dfrac{1}{7\cdot9},\ \dfrac{1}{9\cdot11},\ \cdots\cdots$

(3) $2\cdot1,\ 4\cdot4,\ 6\cdot4^2,\ 8\cdot4^3,\ 10\cdot4^4,\ \cdots\cdots$

７. 数列$\{a_n\}$：$\dfrac{1}{1},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5},\ \cdots\cdots$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{5}{55}$ は第何項か求めよ。

(2) 第２５０項を求めよ。

(3) 初項から第２５０項までの和を求めよ。

数学演習（数列）Ｈ２１．１．２７　　　（　　）組（　　）番　名前（こたえ　　）

１．第７項が６，第１１項が－６である等差数列において，以下の問いに答えよ。

(1) この等差数列の一般項を求めよ。

$a_n = a+(n-1)d$ とおくと

$a_7 = a+6d = 6$

$a_{11} = a+10d = -6$

∴ $a=24,\ d=-3$

よって $a_n = 24+(n-1)(-3)$

$= -3n+27$

4

(2) この数列の初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

$a_n<0$ となるのは

$-3n+27<0$

∴ $n>9$

また $a_9=0$ より

最大となるのは

第8項，または第9項

4

この時 和は

$S=\frac{1}{2}\cdot 8\{2\cdot 24+(8-1)(-3)\}$

$=4(48-21)$

$=4\cdot 27=108$

4

２．第３項が１２，初項から第３項までの和が２１である等比数列の初項と公比を求めよ。

初項 a，公比 r とすると，$r\neq 0$．

$a_3 = ar^2 = 12$ …①

$a_1+a_2+a_3 = a+ar+ar^2 = 21$ …②

②より $a(1+r+r^2)=21$ で，①より $a=\frac{12}{r^2}$ より

代入して

$\frac{12}{r^2}(1+r+r^2)=21$

∴ $4(1+r+r^2)=7r^2$

整理して

$3r^2-4r-4=0$

$(3r+2)(r-2)=0$

∴ $r=-\frac{2}{3},\ 2$

①より

$r=-\frac{2}{3}$ の時，$a=27$

$r=2$ の時 $a=3$

10

３．x，y は $0<x<y$ を満たすとする。数列 68，y，x が等差数列で，数列 x，12，y が等比数列であるとき，x，y の値を求めよ。

等差中項より $2y=68+x$ …①

等比中項より $12^2=xy$ …②

①より $x=2y-68$ を②に代入して

$12^2=(2y-68)y$

整理して

$y^2-34y-72=0$

$(y-36)(y+2)=0$

∴ $y=36,\ -2$

ここで①より

$y=36$ の時 $x=4$

これは $0<x<y$ を満たす

$y=-2$ の時，$x=-72$

これは $0<x<y$ を満たさない

∴ $x=4,\ y=36$

10

４．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^2+2n+3$ で表されるとき，一般項 a_n を求めよ。

$a_1=S_1=1^2+2\cdot 1+3=6$

$n\geq 2$ の時

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n+3)-\{(n-1)^2+2(n-1)+3\}$

$=2n+1$ …①

ここで，①に $n=1$ を代入すると $2\cdot 1+1=3$

で a_1 と一致しない

∴ $a_n=\begin{cases}6 & (n=1)\\ 2n+1 & (n\geq 2)\end{cases}$

8

５．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ。　5，55，555，5555，……

$\{a_n\}$: 5, 55, 555, 5555, ……

$\{b_n\}$: 50, 500, 5000

階差数列 $\{b_n\}$ は初項50，公比10の等比数列より $b_n=50\cdot 10^{n-1}$ である。

∴ $n\geq 2$ の時

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ ←（初 50　比 10　数 $n-1$）

$=5+\sum_{k=1}^{n-1}50\cdot 10^{k-1}$

$=5+\frac{50(10^{n-1}-1)}{10-1}$

$=5+\frac{5\cdot 10^n-50}{9}$

$=\frac{5\cdot 10^n-5}{9}=\frac{5}{9}(10^n-1)$ …①

ここで $n=1$ を①に代入すると成り立つので

$a_n=\frac{5}{9}(10^n-1)$

5

また和は

$S=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{9}(10^k-1)$ （初 10　比 10　数 n）

$=\frac{5}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)$

$=\frac{5}{9}\left(\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right)$

$=\frac{5}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}\right)=\frac{5(10^{n+1}-9n-10)}{81}$

6．次の数列の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ。

(1) $2^2\cdot5$, $4^2\cdot7$, $6^2\cdot9$, $8^2\cdot11$, $10^2\cdot13$, ……

$$a_n=(2n)^2(2n+3)$$ 5

また、和は

$$S=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2(2k+3)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(8k^3+12k^2)$$
$$=8\sum_{k=1}^{n}k^3+12\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=8\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+12\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=2n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)$$
$$=2n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)\}$$
$$=2n(n+1)(n^2+3n+1)$$ 5

(2) $\frac{1}{1\cdot3}$, $\frac{1}{3\cdot5}$, $\frac{1}{5\cdot7}$, $\frac{1}{7\cdot9}$, $\frac{1}{9\cdot11}$, ……

一般項 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 5

和は

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1-1}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}$$ 5

(3) $2\cdot1$, $4\cdot4$, $6\cdot4^2$, $8\cdot4^3$, $10\cdot4^4$, ……

一般項 $2n\cdot4^{n-1}$ 5

和は

$$S=2\cdot1+4\cdot4+6\cdot4^2+\cdots+2n\cdot4^{n-1}$$
$$-)\ 4S=\quad 2\cdot4+4\cdot4^2+\cdots+2(n-1)\cdot4^{n-1}+2n\cdot4^n$$
$$-3S=\underbrace{2\cdot1+2\cdot4+2\cdot4^2+\cdots+2\cdot4^{n-1}}_{\text{初}2.\ \text{比}4.\ \text{数}n}-2n\cdot4^n$$
$$=\frac{2(4^n-1)}{4-1}-2n\cdot4^n$$
$$=\frac{2\cdot4^n-2-6n\cdot4^n}{3}$$
$$=\frac{-(6n-2)\cdot4^n-2}{3}$$
$$\therefore\ S=\frac{(6n-2)\cdot4^n+2}{9}$$ 5

7．数列 $\{a_n\}$: $\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2},\frac{2}{2}\Big|\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3}\Big|\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4}\Big|\frac{1}{5},\frac{2}{5}$,…… について，以下の問いに答えよ。

(1) $\frac{5}{55}$ は第何項か求めよ。

分母が n である項が属する群を n 群とすると
n 群は n 個の項からなる。
$\frac{5}{55}$ は第55群の5番目であり、1群から
第54群には
$$1+2+3+\cdots+54$$
$$=\frac{1}{2}\cdot54\cdot55=1485\text{項}$$
の項が属するので
$\frac{5}{55}$ は $1485+5=1490$ 番目である 4

(2) 第２５０項を求めよ。

a_{250} が第 n 群に属するとすると不等式

n 群
(○| a_{250} ○|)
$\frac{1}{2}(n-1)n$ 　 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

$$\frac{1}{2}(n-1)n<250\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$ が
成り立つ。
$$\therefore\ (n-1)n<500\leqq n(n+1)\quad\left(\begin{array}{l}n^2\fallingdotseq500\\ n\fallingdotseq10\sqrt{5}\fallingdotseq22\end{array}\right)$$
ここで $n=22$ とすると
$$21\times22=462,\quad 22\times23=506$$
より上の不等式を満たす。ゆえに a_{250} は第22群に属し、また21群の末項は $\frac{1}{2}\cdot21\cdot22=231$ 番目より a_{250} は第22群の19番目。
$$\therefore\ a_{250}=\frac{19}{22}$$ 8

(3) 初項から第２５０項までの和を求めよ。

第 n 群に属する項の和は
$$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)$$
よって、a_{250} が第22群の19番目より
$$\underset{1\text{群}}{\frac{2}{2}}+\underset{2\text{群}}{\frac{3}{2}}+\underset{3\text{群}}{\frac{4}{2}}+\cdots+\underset{21\text{群}}{\frac{22}{2}}+\underbrace{\frac{1}{22}+\frac{2}{22}+\cdots+\frac{19}{22}}_{22\text{群}}$$
$$=\sum_{k=1}^{21}\frac{k+1}{2}+\frac{1}{22}(1+2+\cdots+19)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{21}k+\sum_{k=1}^{21}1\right)+\frac{1}{22}\times\frac{1}{2}19\cdot20$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot21\cdot22+21\right)+\frac{1}{22}\cdot19\cdot10$$
$$=126+\frac{95}{11}$$
$$=\frac{1386+95}{11}=\frac{1481}{11}$$ A