統一テスト（数列）Ｈ２７．２．９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１. 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。　$x+1$，9，x^2-3，……

２. 第 6 項が 33，第 11 項が 63 である等差数列 $\{a_n\}$ において，初めて 200 より大きくなるのは第何項か。

３. 次の等差数列の和を求めよ。　2，5，8，……，50

４. 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，S_n を求めよ。

５. 初項が -29，公差が 3 である等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　S_n が最小となる n の値を求めよ。

(2)　S_n が初めて正の数となる n の値を求めよ。

６. 第 3 項が -40，第 5 項が -160 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

７. 次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ。　16，x，1，……

８. 初項から第 3 項までの和が 21，第 3 項から第 5 項までの和が 84 である等比数列の初項と公比を求めよ。

９. 次の数の正の約数全体の和を求めよ。　$2^4\cdot 3^3$

10. 次の和を求めよ。　$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

11. 次の数列の初項から第n項までの和を求めよ。　$1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot5$，$4\cdot7$，$5\cdot9$，……

12. 階差数列を利用して，次の数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　10，8，4，-2，-10，……

13. 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

14. 次の数列の第 k 項 a_k と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$3,\ 3+9,\ 3+9+27,\ 3+9+27+81,\ \cdots\cdots$$

15. 和 $S=\dfrac{1}{3\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot15}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ を求めよ。

16. 和 $S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$ を求めよ。

17. 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には $(2n-1)$ 個の数が入るものとする。

$$\underset{\text{第1群}}{1}\ \big|\ \underset{\text{第2群}}{3,\ 5,\ 7}\ \big|\ \underset{\text{第3群}}{9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17}\ \big|\ 19,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最初の数を求めよ。

(2)　第 n 群に入るすべての数の和を求めよ。

1．次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。　$x+1,\ 9,\ x^2-3,\ \cdots\cdots$

解答　$x=4,\ -5$　5

解説

隣り合う2項の差が等しいから

$$9-(x+1)=(x^2-3)-9$$

よって　$x^2+x-20=0$　すなわち　$(x-4)(x+5)=0$

したがって　$x=4,\ -5$

別解　$x+1,\ 9,\ x^2-3$ が等差数列であるから

$$2\times9=(x+1)+(x^2-3)$$

よって　$x^2+x-20=0$　これを解いて　$x=4,\ -5$

2．第6項が33，第11項が63である等差数列 $\{a_n\}$ において，初めて200より大きくなるのは第何項か。

解答　第34項　5

解説

初項を a，公差を d とする。

$a_6=33$ であるから　$a+5d=33$　……①

$a_{11}=63$ であるから　$a+10d=63$　……②

①，② を解くと　$a=3,\ d=6$　3

よって　$a_n=3+(n-1)\cdot6=6n-3$

$a_n>200$ とすると　$6n-3>200$

ゆえに　$n>\dfrac{203}{6}=33.8\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=34$

よって，初めて200より大きくなるのは第34項である。

3．次の等差数列の和を求めよ。　$2,\ 5,\ 8,\ \cdots\cdots,\ 50$

解答　442　5

解説

この等差数列の初項は2，公差は3である。

項数を n とすると　$2+(n-1)\cdot3=50$

すなわち　$3n-1=50$　よって　$n=17$　3

したがって，初項2，末項50，項数17の等差数列の和を求めて

$$\frac{1}{2}\cdot17(2+50)=442$$

4．等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，S_n を求めよ。

解答　n^2　5

解説

初項を a，公差を d とする。

$S_{10}=100$ であるから　$\dfrac{1}{2}\cdot10(2a+9d)=100$　よって　$2a+9d=20$　……①

$S_{20}=400$ であるから　$\dfrac{1}{2}\cdot20(2a+19d)=400$　よって　$2a+19d=40$　……②

①，② を解くと　$a=1,\ d=2$　3

したがって　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot1+(n-1)\cdot2\}=n^2$

5．初項が -29，公差が3である等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　S_n が最小となる n の値を求めよ。

(2)　S_n が初めて正の数となる n の値を求めよ。

解答　(1)　$n=10$　5　(2)　$n=21$　5

解説

一般項は　$a_n=-29+(n-1)\cdot3$　すなわち　$a_n=3n-32$

(1)　$a_n>0$ とすると　$3n-32>0$

よって　$n>\dfrac{32}{3}=10.6\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=11$

したがって，第11項が初めて正の数になる。

$$a_1<0,\ a_2<0,\ \cdots\cdots,\ a_{10}<0,\ a_{11}>0,\ a_{12}>0,\ \cdots\cdots$$

よって，初項から第10項までの和 S_{10} が最小となる。

すなわち，$n=10$ のとき S_n が最小となる。

(2)　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot(-29)+(n-1)\cdot3\}=\dfrac{1}{2}n(3n-61)$

$S_n>0$ とすると　$\dfrac{1}{2}n(3n-61)>0$

$n>0$ であるから　$3n-61>0$

よって　$n>\dfrac{61}{3}=20.3\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=21$

すなわち，$n=21$ のとき S_n が初めて正の数となる。

6．第3項が -40，第5項が -160 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=-10\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=-10(-2)^{n-1}$　5　（片方のみ 3）

解説

初項を a，公比を r とする。

$a_3=-40$　であるから　$ar^2=-40$　……①

$a_5=-160$ であるから　$ar^4=-160$　……②

①，② から　$r^2=4$　したがって　$r=\pm2$

① から　$r=2$ のとき　$a=-10$

$r=-2$ のとき　$a=-10$

よって，一般項は　$a_n=-10\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=-10(-2)^{n-1}$

7．次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ。　$16,\ x,\ 1,\ \cdots\cdots$

解答　$x=\pm4$　5　（片方のみ 3）

解説

隣り合う2項の比が等しいから　$\dfrac{x}{16}=\dfrac{1}{x}$

よって　$x^2=16\times1=16$　したがって　$x=\pm4$

別解　$16,\ x,\ 1$ が等比数列であるから　$x^2=16\times1$　よって　$x=\pm4$

8．初項から第3項までの和が21，第3項から第5項までの和が84である等比数列の初項と公比を求めよ。

解答　初項3，公比2　または　初項7，公比 -2　5　（片方のみ 3）

解説

初項を a，公比を r とすると，条件から

$$a+ar+ar^2=21 \quad \cdots\cdots①$$

$$ar^2+ar^3+ar^4=84 \quad \cdots\cdots②$$

② から　$r^2(a+ar+ar^2)=84$

① を代入して　$21r^2=84$　したがって　$r=\pm2$

$r=2$ のとき，① から　$a+2a+4a=21$　これを解くと　$a=3$

$r=-2$ のとき，① から　$a-2a+4a=21$　これを解くと　$a=7$

したがって　初項3，公比2　または　初項7，公比 -2

9．次の数の正の約数全体の和を求めよ。　$2^4\cdot3^3$

解答　1240　5

解説

求める和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2+3^3)=\frac{1\cdot(2^5-1)}{2-1}\times\frac{1\cdot(3^4-1)}{3-1}=1240$$

/50

10. 次の和を求めよ。 $\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

解答 $\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$ 5

解説

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$$
3
$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$$
$$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$$
4

11. 次の数列の初項から第n項までの和を求めよ。 1·1, 2·3, 3·5, 4·7, 5·9, ……

解答 $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ 5

解説 2つの数の積になっており，左側の数は初項1, 公差1の等差数列，右側は初項1, 公差2の等差数列である。

これは，第 k 項が $k(2k-1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$
3
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

12. 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 10, 8, 4, −2, −10, ……

解答 $a_n=-n^2+n+10$ 5

解説 この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は −2, −4, −6, −8, ……

よって $b_n=-2n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき ← なければ −1

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=10-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=-n^2+n+10$$

初項は $a_1=10$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は $a_n=-n^2+n+10$

13. 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n=2n-5$ 5

解説 初項は $a_1=S_1=1^2-4\cdot1=-3$ ……①

$n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-4n)-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$
$=2n-5$

①より $a_1=-3$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は $a_n=2n-5$

なければ −1

14. 次の数列の第 k 項 a_k と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

3, 3+9, 3+9+27, 3+9+27+81, ……

解答 $a_k=\frac{3}{2}(3^k-1)$, $S_n=\frac{3}{4}(3^{n+1}-2n-3)$ 5 5

解説 $a_k=3+9+27+\cdots\cdots+3^k$

これは，初項3，公比3の等比数列の，初項から第 k 項までの和であるから

$$a_k=\frac{3(3^k-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^k-1)$$

よって $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}(3^k-1)=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k-1)=\frac{3}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)$

$$=\frac{3}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}=\frac{3}{2}\left\{\frac{3}{2}(3^n-1)-n\right\}$$
$$=\frac{3}{4}\{3(3^n-1)-2n\}=\frac{3}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

15. 和 $S=\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{7\cdot11}+\frac{1}{11\cdot15}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ を求めよ。

解答 $S=\frac{n}{3(4n+3)}$ 5

解説 第 k 項は $\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$

よって，求める和 S は

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4n+3)-3}{3(4n+3)}=\frac{n}{3(4n+3)}$$

16. 和 $S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$ を求めよ。

解答 $S=(n-1)\cdot3^n+1$ 5

解説

$$S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+7\cdot3^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$$
$$3S=\qquad 1\cdot3+3\cdot3^2+5\cdot3^3+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n$$

辺々を引くと

$$S-3S=1\cdot1+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}-(2n-1)\cdot3^n$$

よって $-2S=1+2(3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot3^n$

$$=1+2\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot3^n=-2(n-1)\cdot3^n-2$$

したがって $S=(n-1)\cdot3^n+1$

3

17. 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には $(2n-1)$ 個の数が入るものとする。

1 | 3, 5, 7 | 9, 11, 13, 15, 17 | 19, ……

第1群 第2群 第3群

(1) 第 n 群の最初の数を求めよ。

(2) 第 n 群に入るすべての数の和を求めよ。

解答 (1) $2n^2-4n+3$ (2) $(2n-1)(2n^2-2n+1)$ 5 5

解説 (1) $n\geqq 2$ のとき，第1群から第 $(n-1)$ 群までに入る奇数の個数は

$$1+3+5+\cdots\cdots+\{2(n-1)-1\}=(n-1)^2\ (個)$$

よって，第 n 群 $(n\geqq 2)$ の最初の数は，奇数の列の第 $\{(n-1)^2+1\}$ 項であるから

$$2\{(n-1)^2+1\}-1=2(n-1)^2+1=2n^2-4n+3$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，求める数は $2n^2-4n+3$

(2) 求める和は，初項 $2n^2-4n+3$，公差2，項数 $2n-1$ の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}(2n-1)[2\cdot(2n^2-4n+3)+\{(2n-1)-1\}\cdot2]=(2n-1)(2n^2-2n+1)$$

/50