第５回定期考査（数列）追試Ｈ３０．３．１２　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 初項 -10，公差 -2 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

$\boxed{2}$ 第 3 項が 8，第 6 項が -1 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$ 等差数列 5，9，13，…… の第何項が初めて 200 を超えるか。

$\boxed{4}$ 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。　2，x，7，……

$\boxed{5}$ 次のような等差数列の和 S を求めよ。　初項 2，末項 15，項数 10

$\boxed{6}$ 初項 4，公差 7 である等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$\boxed{7}$ 初項 2，公比 -3 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

$\boxed{8}$ 第 4 項が12，第 6 項が 48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ。　3，x，5，……

$\boxed{10}$ 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　初項 20，公比 -3　　　(2)　1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4^2}$，$\frac{1}{4^3}$，……

$\boxed{11}$ 初項から第 3 項までの和が 4，第 2 項から第 4 項までの和が -8 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

$\boxed{12}$ 次の和を求めよ。　$\sum_{k=1}^{n} 3\times 4^{k-1}$

$\boxed{13}$ 次の和を求めよ。

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(3k+5)$　　　(2)　$\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$

$\boxed{14}$ 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　3，5，9，15，23，……

$\boxed{15}$ 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-2n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{16}$ 次の和 S を求めよ。　$S=\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}$

$\boxed{17}$ 次の和 S を求めよ。　$S=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots\cdots+n\cdot 3^{n-1}$

$\boxed{18}$ 初項が 100，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　第何項が初めて負の数になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和 S を求めよ。

$\boxed{19}$ 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

$$\underbrace{1}_{\text{第1群}}\ |\ \underbrace{3,\ 5}_{\text{第2群}}\ |\ \underbrace{7,\ 9,\ 11}_{\text{第3群}}\ |\ \underbrace{13,\ 15,\ 17,\ 19}_{\text{第4群}}\ |\ 21,\ \cdots$$

(1)　$n\geqq 2$ のとき，第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2)　第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

$\boxed{20}$ 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\cos\frac{k\pi}{4}$ を求めよ。

1 初項 -10，公差 -2 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第10項を求めよ。

$a_n = -10 + (n-1)(-2)$
$= -10 - 2n + 2$
$= -2n - 8$

$a_{10} = -2 \times 10 - 8$
$= -20 - 8$
$= -28$

3　2　5

2 第3項が8，第6項が -1 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項 a，公差 d とすると $a_n = a + (n-1)d$

$a_3 = a + (3-1)d = a + 2d = 8$ …①

$a_6 = a + (6-1)d = a + 5d = -1$ …②

①，②より

$$\begin{array}{r} a + 5d = -1 \\ -)\ a + 2d = 8 \\ \hline 3d = -9 \end{array}$$

$d = -3$
$a - 6 = 8$
$a = 14$

よって
$a_n = 14 + (n-1)(-3)$
$= -3n + 17$

3 等差数列5，9，13，……の第何項が初めて200を超えるか。

初項5，公差4より

一般項は $5 + (n-1) \times 4 = 4n + 1$

よって $4n + 1 > 200$
$4n > 199$
$n > \frac{199}{4} = 49\frac{3}{4}$

この範囲内の最小の自然数 n は $n = 50$

よって 第50項

4 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。　2，x，7，……

等差中項の関係より

$2 \times x = 2 + 7$
$2x = 9$　よって $x = \frac{9}{2}$

5 次のような等差数列の和 S を求めよ。　初項2，末項15，項数10

$S = \frac{1}{2} \times 10 \times (2 + 15)$
$= 5 \times 17 = 85$

6 初項4，公差7である等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \times 4 + (n-1) \times 7\}$
$= \frac{1}{2}n(8 + 7n - 7)$
$= \frac{1}{2}n(7n + 1)$

7 初項2，公比 -3 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第5項を求めよ。　5

$a_n = 2(-3)^{n-1}$　3

$a_5 = 2 \times (-3)^{5-1}$
$= 2 \times (-3)^4$
$= 2 \times 81 = 162$　2

8 第4項が12，第6項が48である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項 a，公比 r とすると 一般項は $a_n = ar^{n-1}$

$a_4 = ar^3 = 12$ …①

$a_6 = ar^5 = 48$ …②

②より $ar^3 \times r^2 = 48$

①を代入して $12r^2 = 48$

$r^2 = 4$
$r = \pm 2$

・$r = 2$ のとき $8a = 12$，$a = \frac{3}{2}$
・$r = -2$ のとき $-8a = 12$，$a = -\frac{3}{2}$

以上より $a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}$，$-\frac{3}{2}(-2)^{n-1}$

9 次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ。　3，x，5，……

等比中項の関係より

$x^2 = 3 \times 5$
$x^2 = 15$　よって $x = \pm\sqrt{15}$

10 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 初項20，公比 -3　　(2) 1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4^2}$，$\frac{1}{4^3}$，……

(1)
$S_n = \frac{20\{1 - (-3)^n\}}{1 - (-3)}$
$= \frac{20}{4}\{1 - (-3)^n\}$
$= 5\{1 - (-3)^n\}$

(2) 初項1，公比 $\frac{1}{4}$
$S_n = \frac{1 \cdot \{1 - (\frac{1}{4})^n\}}{1 - \frac{1}{4}}$
$= \{1 - (\frac{1}{4})^n\} \div \frac{3}{4}$
$= \frac{4}{3}\{1 - (\frac{1}{4})^n\}$

11 初項から第3項までの和が4，第2項から第4項までの和が -8 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

一般項 $a_n = ar^{n-1}$ より

$a + ar + ar^2 = 4$ …①
$ar + ar^2 + ar^3 = -8$ …②

②より
$r(a + ar + ar^2) = -8$

①代入して
$r \times 4 = -8$ よって $r = -2$

①に代入して
$a + (-2)a + (-2)^2 a = 4$
$a - 2a + 4a = 4$
$3a = 4$
$a = \frac{4}{3}$

以上より
$a = \frac{4}{3}$，$r = -2$

12 次の和を求めよ。　$\sum_{k=1}^{n} 3 \times 4^{k-1}$

$\sum_{k=1}^{n} 3 \times 4^{k-1} = 3 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + 3 \times 4^2 + \cdots + 3 \times 4^{n-1}$

初項 3×4^0，公比4，項数 n の等比数列の和

$\sum_{k=1}^{n} 3 \times 4^{k-1} = \frac{3 \times 4^0(4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{3}{3}(4^n - 1) = 4^n - 1$

13 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(3k+5)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$

(1)
$\sum_{k=1}^{n} 3k + \sum_{k=1}^{n} 5$
$= 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 5$
$= 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 5n$
$= \frac{3}{2}n(n+1) + \frac{10}{2}n$
$= \frac{1}{2}n\{3(n+1) + 10\}$
$= \frac{1}{2}n(3n + 13)$

(2)
$\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$
$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$
$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{6}{6}n(n+1)$
$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1) + 6\}$
$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

/62

14 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 3, 5, 9, 15, 23, ……

2 4 6 8

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は

初項2, 公差2の等差数列より，一般項 b_n は

$b_n = 2+(n-1)\cdot 2 = 2n$.

$n \geqq 2$ の時

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$

$= 3 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k$

$= 3 + 2\times\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$

$= 3 + n(n-1)$

$= n^2 - n + 3 \cdots (*)$

$(*)$ は $n=1$ のときも成り立つ

以上より

$a_n = n^2 - n + 3$

15 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = n^2 - 2n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1 = S_1 = 1^2 - 2\times 1 = -1$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2-2n) - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\}$

$= n^2 - 2n - (n^2 - 2n + 1 - 2n + 2)$

$= n^2 - 2n - (n^2 - 4n + 3)$

$= n^2 - 2n - n^2 + 4n - 3$

$= 2n - 3 \cdots (*)$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると

$2\cdot 1 - 3 = -1$

となって a_1 と一致する。

つまり $(*)$ は $n=1$ のときも成り立つので

$a_n = 2n - 3$

16 次の和 S を求めよ。 $S = \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n(2n+2)}$

$S = \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+2)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2n+2-2}{2(2n+2)}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2n}{2(2n+2)} = \frac{n}{2(2n+2)} = \frac{n}{4(n+1)}$

17 次の和 S を求めよ。 $S = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \cdots\cdots + n\cdot 3^{n-1}$

$S = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + n\cdot 3^{n-1}$

$-)\ 3S = \quad 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + \cdots + (n-1)\cdot 3^{n-1} + n\cdot 3^n$

$-2S = \underbrace{1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot 3^2 + \cdots + 1\cdot 3^{n-1}} - n3^n$

初1·1, 比3, 項数 n

$= \frac{1\cdot 1(3^n - 1)}{3-1} - n\cdot 3^n$

$= \frac{3^n - 1}{2} - \frac{2n\cdot 3^n}{2} = \frac{(1-2n)3^n - 1}{2}$

よって $-2S = \frac{(1-2n)3^n - 1}{2}$ より $S = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}$

18 初項が100，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和 S を求めよ。

(1)

一般項 a_n は

$a_n = 100 + (n-1)(-3)$

$= -3n + 103$

$a_n < 0$ より

$-3n + 103 < 0$

$-3n < -103$

$n > \frac{103}{3} = 34\frac{1}{3}$

これを満たす最小の自然数 n は

$n = 35$ より 第35項 より

負の数となる。

(2)

負の数になる直前の

第34項までの和が最大。

その和 S は

$S = \frac{1}{2}\times 34\times\{2\times 100 + (34-1)\times(-3)\}$

$= 17\times(200 - 99)$

$= 17\times 101$

$= 1717$

3

5

19 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19 | 21, …

第1群 第2群 第3群 第4群

(1) $n \geqq 2$ のとき，第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2) 第10群に入るすべての数の和 S を求めよ。

(1)

1群から $(n-1)$ 群までの項数は

$1 + 2 + \cdots + (n-1)$

$= \sum_{k=1}^{n-1} k$

$= \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$

$= \frac{1}{2}(n-1)n$ 個

より n 群の最初の数は

もともとの数列の第 $\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\}$ 項

もともとの数列は初項1, 公差2の

等差数列であるので第 k 項は

$1 + (k-1)\cdot 2 = 2k - 1$ である。

ゆえに，第 n 群の最初の数は

$2\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\} - 1$

$= (n-1)n + 2 - 1$

$= n^2 - n + 1$

(2)

(1)より 第10群の最初の数は $10^2 - 10 + 1 = 91$

よって第10群は

初項91, 公差2, 項数10 であるから 和 S は

$S = \frac{1}{2}\times 10\times\{2\times 91 + (10-1)\times 2\}$

$= 5(182 + 18)$

$= 5\times 200 = 1000$

20 和 $\sum_{k=1}^{100}\cos\frac{k\pi}{4}$ を求めよ。

$\sum_{k=1}^{100}\cos\frac{k\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} + \cdots + \cos\frac{100\pi}{4}$

$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{2\pi}{4} = 0,\ \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{4}{4}\pi = -1 \\ \cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{6}{4}\pi = 0,\ \cos\frac{7}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{8\pi}{4} = 1 \end{cases}$

この8個の並びが周期的に現れる。

$100 = 8\times 12 + 4$ より

$$\begin{array}{r} 12 \\ 8\overline{)100} \\ 8 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 4 \end{array}$$

この8個の並びが12セットと残り4つが

1番目から100番目までに現れる。

以上より

$\sum_{k=1}^{100}\cos\frac{k\pi}{4} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right\}\times 12$

$+ \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1)$

$= 0\times 12 + (-1) = -1$

5