第５回定期考査（数列）Ｈ３０．３．６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

$\boxed{1}$ 初項 13，公差 -3 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

$\boxed{2}$ 第 3 項が 10，第 6 項が 1 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$ 等差数列 5，9，13，…… の第何項が初めて 100 を超えるか。

$\boxed{4}$ 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。　1，x，8，……

$\boxed{5}$ 次のような等差数列の和 S を求めよ。　初項 1，末項 20，項数 10

$\boxed{6}$ 初項 5，公差 9 である等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$\boxed{7}$ 初項 -2，公比 3 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

$\boxed{8}$ 第 4 項が 24，第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ。　4，x，9，……

$\boxed{10}$ 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　初項 21，公比 -2　　　(2)　$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{3^3},\ \cdots\cdots$

$\boxed{11}$ 初項から第 3 項までの和が 3，第 2 項から第 4 項までの和が -6 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

$\boxed{12}$ 次の和を求めよ。　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^k$

$\boxed{13}$ 次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+4)$　　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-4k)$

$\boxed{14}$ 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　3，6，11，18，27，……

$\boxed{15}$ 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{16}$ 次の和 S を求めよ。　$S=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\boxed{17}$ 次の和 S を求めよ。　$S=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+n\cdot 2^{n-1}$

$\boxed{18}$ 初項が 50，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　第何項が初めて負の数になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和 S を求めよ。

$\boxed{19}$ 正の偶数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

$$\underset{\text{第1群}}{2}\ |\ \underset{\text{第2群}}{4,\ 6}\ |\ \underset{\text{第3群}}{8,\ 10,\ 12}\ |\ \underset{\text{第4群}}{14,\ 16,\ 18,\ 20}\ |\ 22,\ \cdots$$

(1)　$n\geqq 2$ のとき，第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2)　第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

$\boxed{20}$ 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\sin\frac{k\pi}{3}$ を求めよ。

1 初項13，公差 -3 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第10項を求めよ。

△2　△2

解答 $a_n=-3n+16$，$a_{10}=-14$　⑤　　$13+(n-1)(-3)$ は △2

$a_n=13+(n-1)\cdot(-3)$　　$\{a_n\}=-3n+16$ △2

すなわち　$a_n=-3n+16$

第10項は　$a_{10}=-3\cdot10+16=-14$

2 第3項が10，第6項が1である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n=-3n+19$　　$16+(n-1)(-3)$ は △3

初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$

第3項が10であるから　$a+2d=10$　……①

第6項が1であるから　$a+5d=1$　……②

①，②を解くと　$a=16$，$d=-3$ △2

一般項は　$a_n=16+(n-1)\cdot(-3)$

すなわち　$a_n=-3n+19$

3 等差数列5，9，13，…… の第何項が初めて100を超えるか。

解答 第25項

一般項を a_n とする。この等差数列は，初項が5，公差が4であるから，一般項は

$a_n=5+(n-1)\cdot4$

すなわち　$a_n=4n+1$ △2

$4n+1>100$ より　$n>\dfrac{99}{4}=24.75$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=25$

よって，この数列で初めて100を超える項は　第25項

4 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。　1，x，8，……

解答 $x=\dfrac{9}{2}$

等差数列では，隣り合う2項の差が等しいから　$x-1=8-x$

これを解いて　$x=\dfrac{9}{2}$

別解 1，x，8 が等差数列であるから　$2x=1+8$

これを解いて　$x=\dfrac{9}{2}$

5 次のような等差数列の和 S を求めよ。　初項1，末項20，項数10

解答 105

$S=\dfrac{1}{2}\cdot10(1+20)=105$

6 初項5，公差9である等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

解答 $S_n=\dfrac{1}{2}n(9n+1)$　　$\frac{9}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ は △3

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot5+(n-1)\cdot9\}=\dfrac{1}{2}n(9n+1)$

7 初項 -2，公比3である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第5項を求めよ。

△3　△2

解答 $a_n=-2\cdot3^{n-1}$，$a_5=-162$　⑤

$a_n=-2\cdot3^{n-1}$

第5項は　$a_5=-2\cdot3^{5-1}=-2\cdot3^4=-162$

8 第4項が24，第6項が96である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n=3\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=-3(-2)^{n-1}$

初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$

第4項が24であるから　$ar^3=24$　……①

第6項が96であるから　$ar^5=96$　……②

①，②より　$r^2=4$

これを解くと　$r=\pm2$ △2

①から　$r=2$ のとき　$a=3$

$r=-2$ のとき　$a=-3$

よって，一般項は

$a_n=3\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=-3(-2)^{n-1}$　(各2)

9 次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ。　4，x，9，……

解答 $x=\pm6$　　$x=6$ △2

等比数列では，隣り合う2項の比が等しいから　$\dfrac{x}{4}=\dfrac{9}{x}$

よって　$x^2=4\cdot9=36$

したがって　$x=\pm6$

別解 4，x，9 が等比数列であるから　$x^2=4\cdot9$

これを解いて　$x=\pm6$

10 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 初項21，公比 -2　　(2) 1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3^2}$，$\dfrac{1}{3^3}$，……

解答 (1) $7\{1-(-2)^n\}$　(2) $\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$　　$\dfrac{3\{1-(\frac{1}{3})^n\}}{2}$ は △3

(1) $S_n=\dfrac{21\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=7\{1-(-2)^n\}$

(2) この等比数列の初項は1，公比は $\dfrac{1}{3}$ であるから

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

11 初項から第3項までの和が3，第2項から第4項までの和が -6 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

解答 $a=1$，$r=-2$

条件から　$a+ar+ar^2=3$　……①

$ar+ar^2+ar^3=-6$　……②

②より　$r(a+ar+ar^2)=-6$

①を代入して　$3r=-6$　よって　$r=-2$ △2

①より　$a-2a+4a=3$　これを解くと　$a=1$

よって　$a=1$，$r=-2$

12 次の和を求めよ。　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5^k$

解答 $\dfrac{5}{4}(5^n-1)$

与式$=\dfrac{5(5^n-1)}{5-1}=\dfrac{5}{4}(5^n-1)$

13 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+4)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-4k)$

解答 (1) $\dfrac{1}{2}n(5n+13)$　(2) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n-11)$

(1) 与式$=5\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4=5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n=\frac{1}{2}n(5n+13)$ △2

(2) 与式$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$ △2

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)-12\}$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n-11)$

・因数分解できていない △−1

・かっこなし △−1

/62

14 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 3, 6, 11, 18, 27, ……

解答 $a_n=n^2+2$

この数列の階差数列は

3, 5, 7, 9, ……

その一般項を b_n とすると，$b_n=2n+1$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき ← なければ -1

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=3+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1$$

2

$$=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$$

すなわち $a_n=n^2+2$ 2

初項は $a_1=3$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。 ← なければ -1

したがって，一般項は $a_n=n^2+2$

15 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n=2n+3$

初項 a_1 は $a_1=S_1=1^2+4\cdot 1=5$ ……① $n\geqq 2$ なければ -1

$n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}$ 1

$$=(n^2+4n)-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$$

すなわち $a_n=2n+3$ 2

① より $a_1=5$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。 ← なければ -1

したがって，一般項は $a_n=2n+3$

16 次の和 S を求めよ。 $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

解答 $\frac{n}{n+1}$

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

2

17 次の和 S を求めよ。 $S=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+n\cdot 2^{n-1}$

解答 $(n-1)\cdot 2^n+1$

$$\begin{array}{rl} S= & 1\cdot 1+2\cdot 2+\cdots\cdots+n\cdot 2^{n-1} \\ -)\ 2S= & \qquad 1\cdot 2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n \\ \hline -S= & 1\cdot 1+1\cdot 2+\cdots\cdots\cdots+1\cdot 2^{n-1}\quad -n\cdot 2^n \end{array}$$

よって $-S=\frac{1\cdot 1(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^n$ 2

$$=2^n-1-n\cdot 2^n=(1-n)\cdot 2^n-1$$

したがって $S=(n-1)\cdot 2^n+1$

18 初項が 50，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和 S を求めよ。

2 3

解答 (1) 第 18 項 (2) 第 17 項，$S=442$ 5

(1) a_n の一般項は $a_n=50+(n-1)\cdot(-3)$

すなわち $a_n=-3n+53$ 2

$a_n<0$ を満たす最小の自然数 n を求めればよい。

$-3n+53<0$ より $n>\frac{53}{3}=17.66\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は $n=18$

よって，この数列で初めて負の数になる項は 第 18 項

(2) (1)から，この数列の第 18 項からはすべて負の数になるので，初項から第 17 項までの和が最大となる。

求める和は，初項 50，公差 -3，項数 17 の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot 17\{2\cdot 50+(17-1)\cdot(-3)\}=442$$

別解 初項から第n項までの和をS_n とすると

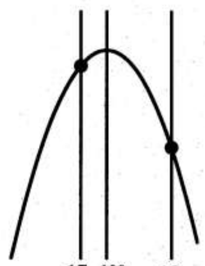
$$S_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot\{2\cdot 50+(n-1)\cdot(-3)\}$$

$$=\frac{1}{2}n(-3n+103)=-\frac{3}{2}n^2+\frac{103}{2}n$$

$$=-\frac{3}{2}\left(n^2-\frac{103}{3}n\right)$$

$$=-\frac{3}{2}\left\{\left(n-\frac{103}{6}\right)^2-\left(\frac{103}{6}\right)^2\right\}$$

$$=-\frac{3}{2}\left(n-\frac{103}{6}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{103}{6}\right)^2$$



ここで，$\frac{103}{6}=17.16\cdots$ より，$\frac{103}{6}$に最も近い自然数nは$n=17$

したがって，S_n は$n=17$ のとき最大となり，最大値は

$$S_{17}=\frac{1}{2}\cdot 17\cdot(-3\cdot 17+103)=442$$

19 正の偶数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

2 | 4, 6 | 8, 10, 12 | 14, 16, 18, 20 | 22, …

第1群 第2群 第3群 第4群

(1) $n\geqq 2$ のとき，第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2) 第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

解答 (1) n^2-n+2 (2) 1010

(1) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

したがって，第 n 群の最初の数は，もとの偶数の列の第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項であるから

$$2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}=n^2-n+2$$

2

(2) 第 10 群の最初の数は，(1)の結果を用いて

$$10^2-10+2=92$$

よって，和Sは，初項 92，公差 2，項数 10 の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot 10\{2\cdot 92+(10-1)\cdot 2\}=1010$$

20 和 $\sum_{k=1}^{100}\sin\frac{k\pi}{3}$ を求めよ。

解答 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5

$$\sum_{k=1}^{100}\sin\frac{k\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2}{3}\pi+\sin\frac{3}{3}\pi+\cdots\cdots+\sin\frac{100}{3}\pi$$

ここで，数列 $\sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{2}{3}\pi, \sin\frac{3}{3}\pi, \cdots$ は「$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$」を繰り返す数列である。$100=6\times 16+4$ であるから，$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2}{3}\pi+\sin\frac{3}{3}\pi+\cdots\cdots+\sin\frac{100}{3}\pi$ は「$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$」を16組と，$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ の4個を足したものである。

ゆえに，

$$\sum_{k=1}^{100}\sin\frac{k\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+0\right)\times 16+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$