数学演習（数列）Ｈ２１．１．２６　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．第１１項が－６０，第３１項が２０である等差数列において，以下の問いに答えよ。

(1) この等差数列の一般項を求めよ。

(2) この数列の初項から第何項までの和が最小となるか。また，その最小値を求めよ。

２．第２項が６，初項から第３項までの和が２６である等比数列の初項と公比を求めよ。

３．x，y は異なる実数とする。数列 $2, x, y$ が等差数列で，数列 $x, 2, y$ が等比数列であるとき，x，y の値を求めよ。

４．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^3 + 2$ で表されるとき，一般項 a_n を求めよ。

５．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ。　$7, 77, 777, 7777, \cdots\cdots$

6．次の数列の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ。

(1) $2^2\cdot 1,\ 4^2\cdot 3,\ 6^2\cdot 5,\ 8^2\cdot 7,\ 10^2\cdot 9,\ \cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 4},\ \dfrac{1}{4\cdot 7},\ \dfrac{1}{7\cdot 10},\ \dfrac{1}{13\cdot 16},\ \dfrac{1}{16\cdot 19},\ \cdots\cdots$

(3) $2\cdot 1,\ 4\cdot 3,\ 6\cdot 3^2,\ 8\cdot 3^3,\ 10\cdot 3^4,\ \cdots\cdots$

7．数列 $\{a_n\}$: $\dfrac{1}{1},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5},\ \cdots\cdots$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{2}{22}$ は第何項か求めよ。

(2) 第１５０項を求めよ。

(3) 初項から第１５０項までの和を求めよ。

１．第１１項が－６０，第３１項が２０である等差数列において，以下の問いに答えよ。

(1) この等差数列の一般項を求めよ。

初項 a, 公差 d とすると $a_n = a+(n-1)d$

$a_{11}=-60$, $a_{31}=20$ より

$$\begin{cases} a+10d=-60 \\ a+30d=20 \end{cases}$$

$\therefore a=-100,\ d=4$

よって

$a_n = -100+(n-1)\cdot 4$

$= 4n-104$

4

(2) この数列の初項から第何項までの和が最小となるか。また，その最小値を求めよ。

$a_n>0$ となるのは，

$4n-104>0$

$\therefore n>26$

a_1	a_2	……	a_{25}	a_{26}	a_{27}
-100	-96		-4	0	4

最小

ここで，$a_{26}=0$ より

和が最小となるのは

$n=25,26$ の時

4

この時

$S=\frac{1}{2}\cdot 25\{2(-100)+(25-1)\cdot 4\}$

$=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot(-200+96)$

$=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot(-104)$

$=-1300$

4

２．第２項が６，初項から第３項までの和が２６である等比数列の初項と公比を求めよ。

初項を a, 公比を r とすると

第２項は ar となるので

$$\begin{cases} ar=6 & \cdots\cdots ① \\ a+ar+ar^2=26 & \cdots ② \end{cases}$$

①より $r\neq 0$ であるので，$a=\frac{6}{r}$

また②より

$a(1+r+r^2)=26$

$\therefore \frac{6}{r}(1+r+r^2)=26$

両辺に r をかけて

$6(1+r+r^2)=26r$

整理して

$3r^2-10r+3=0$

$\therefore (3r-1)(r-3)=0$

$\therefore r=\frac{1}{3}, 3$

$r=\frac{1}{3}$ の時 $a=18$

$r=3$ の時 $a=2$

10

３．x，y は異なる実数とする。数列２，x，y が等差数列で，数列 x，２，y が等比数列であるとき，x，y の値を求めよ。

等差中項より $2x=2+y$ ‥①

等比中項より $2^2=xy$ ‥②

10

①より $y=2x-2$ を②に代入すると

$x(2x-2)=4$

$\therefore x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$\therefore x=2,-1$

①より

$x=2$ の時 $y=2$

(しかしこれは $x=y$ より不適

$x=-1$ の時 $y=-4$

これは $x\neq y$ を満たす

$\therefore$

$x=-1,\ y=-4$

４．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^3+2$ で表されるとき，一般項 a_n を求めよ。

$a_1=S_1=1^3+2=3$

$n\geqq 2$ の時

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^3+2)-\{(n-1)^3+2\}$

$=n^3-(n^3-3n^2+3n-1)$

$=3n^2-3n+1$ ‥①

ここで $n=1$ の時 ①は $3-3+1=1$ で

a_1 に一致しない

8

$\therefore$

$$a_n=\begin{cases} 3 & (n=1) \\ 3n^2-3n+1 & (n\geqq 2) \end{cases}$$

５．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ。　７，７７，７７７，７７７７，……

$\{a_n\}$: 7, 77, 777, 7777, ‥‥

$\{b_n\}$: 70, 700, 7000

階差数列 $\{b_n\}$ は初項 70，公比 10 の

等比数列より $b_n=70\cdot 10^{n-1}$

$\therefore$

$n\geqq 2$ の時

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$=7+\sum_{k=1}^{n-1} 70\cdot 10^{k-1}$

$=7+\frac{70(10^{n-1}-1)}{10-1}$

$=7+\frac{7\cdot 10^n-70}{9}$

$=\frac{63+7\cdot 10^n-70}{9}=\frac{7}{9}(10^n-1)$ ‥①

ここで①に $n=1$ を代入すると成り立つ。

$\therefore a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$

5

また，和は，

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{9}(10^k-1)$

(初 10 / 比 10 / 数 n)

$=\frac{7}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)$

$=\frac{7}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$

$=\frac{7}{9}\cdot\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)=\frac{7(10^{n+1}-9n-10)}{81}$

5

6．次の数列の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ。

(1) $2^2\cdot1,\ 4^2\cdot3,\ 6^2\cdot5,\ 8^2\cdot7,\ 10^2\cdot9,\ \ldots\ldots$

$$a_n=(2n)^2\cdot(2n-1)$$ ⑤

また，和は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2(2k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}4k^2(2k-1)$$
$$=8\sum_{k=1}^{n}k^3-4\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=8\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=2n^2(n+1)^2-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{2}{3}n(n+1)\{3n(n+1)-(2n+1)\}$$
$$=\frac{2}{3}n(n+1)(3n^2+n-1)$$ ⑤

(2) $\frac{1}{1\cdot4},\ \frac{1}{4\cdot7},\ \frac{1}{7\cdot10},\ \frac{1}{13\cdot16},\ \frac{1}{16\cdot19},\ \ldots\ldots$

1, 4, 7, 10, …… は初項 1，公差 3 の等差数列

∴ $1+3(n-1)=3n-2$

よって，一般項は

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$ ⑤

また，

$$S=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n-1}{3n+1}=\frac{n}{3n+1}$$ ⑤

(3) $2\cdot1,\ 4\cdot3,\ 6\cdot3^2,\ 8\cdot3^3,\ 10\cdot3^4,\ \ldots\ldots$

$$a_n=2n\cdot3^{n-1}$$ ⑤

また和は

$$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$$
$$-)\ 3S=\qquad 2\cdot3+4\cdot3^2+\cdots+2(n-1)\cdot3^{n-1}+2n\cdot3^n$$
$$-2S=\underbrace{2\cdot1+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots+2\cdot3^{n-1}}_{\text{初 }2,\ \text{比 }3,\ \text{数 }n}-2n\cdot3^n$$
$$=\frac{2(3^n-1)}{3-1}-2n\cdot3^n$$
$$=3^n-1-2n\cdot3^n$$
$$=(1-2n)\cdot3^n-1$$

∴

$$-2S=(1-2n)\cdot3^n-1$$

より

$$S=\frac{1}{2}\{(2n-1)\cdot3^n+1\}$$ ⑤

7．数列 $\{a_n\}$: $\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\frac{2}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\frac{2}{5},\ \ldots\ldots$ について，以下の問いに答えよ。

1群　2群　3群　4群

(1) $\frac{2}{22}$ は第何項か求めよ。

分母が n である項が属する群を，第 n 群とする。

すると，n 群には n 個の項がある。

$\frac{2}{22}$ は，第22群の2番目であり，

1群から第21群までには，

$$1+2+3+\cdots+21$$
$$=\frac{1}{2}\cdot21\cdot22=231 \text{ 個の項がある。}$$

ゆえに $\frac{2}{22}$ はこの数列の第233項である ④

(2) 第１５０項を求めよ。

a_{150} が第 n 群に属するとすると不等式

$n-1$ 群 ○ | 　n 群 a_{150} ○ |

$\frac{1}{2}(n-1)n$ 　　 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

$$\frac{1}{2}(n-1)n<150\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$ が成り立つ。

∴ $(n-1)n<300\leqq n(n+1)$ 　（$n^2≒300$　∴ $n≒10\sqrt{3}≒17$）

ここで $n=17$ とすると $16\times17=272$，$17\times18=306$ より，上の不等式を満たす。よって a_{150} は第17群である。16群の最後は $\frac{1}{2}\cdot16\cdot17=136$ より

a_{150} は第17群の14番目

つまり

$$a_{150}=\frac{14}{17}$$ ⑧

(3) 初項から第１５０項までの和を求めよ。

(2)より，a_{150} は第17群の14番目。

ここで，第 n 群に属する項の和は，

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}$$
$$=\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)$$

よって，求める和は

$$S=\underbrace{\frac{2}{2}}_{1群}+\underbrace{\frac{3}{2}}_{2群}+\underbrace{\frac{4}{2}}_{3群}+\cdots+\underbrace{\frac{17}{2}}_{16群}+\underbrace{\frac{1}{17}+\frac{2}{17}+\cdots+\frac{14}{17}}_{17群}$$
$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{k+1}{2}+\frac{1}{17}(1+2+\cdots+14)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{16}k+\sum_{k=1}^{16}1\right)+\frac{1}{17}\times\frac{1}{2}14\cdot15$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot16\cdot17+16\right)+\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{2}\cdot14\cdot15$$
$$=\frac{1}{2}(136+16)+\frac{1}{17}\cdot105=76+\frac{105}{17}$$

$$\frac{1397}{17}$$ ⑧