数学演習（等差数列の和）Ｈ２４．１０．４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次のような等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 8，末項 84，項数 20　　(2)　初項 80，末項 0，項数 17

2．次のような等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n および S_{10} を求めよ。

(1)　初項 1，公差 4　　(2)　初項 100，公差 -2

(3)　2，7，12，……　　(4)　50，46，42，……

3．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　2，5，8，……，50　　(2)　90，84，78，……，0

4．次の和を求めよ。

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+20$　　(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+31$

(3)　$4+5+6+\cdots\cdots+60$　　(4)　$2+6+10+\cdots\cdots+54$

5．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　123，120，117，……，-24　　(2)　$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，……，$\frac{99}{5}$

6．1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　(2)　4 の倍数でない数の和

7．20 から 200 までの整数のうち，次のような数の和を求めよ。

(1)　5 の倍数　　(2)　5 で割り切れない数　　(3)　6 で割ると 4 余る数

8．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

9．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

10．等差数列 111，117，123，129，…… において，400 と 600 の間にある項の個数を求めよ。また，それらの項の和を求めよ。

11．初項が -50，公差が 3 である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n が初めて正となる n の値を求めよ。

数学演習（等差数列の和）Ｈ２４．１０．４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．次のような等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 8，末項 84，項数 20　　　(2)　初項 80，末項 0，項数 17

解答　(1)　920　　(2)　680

(1)　$\frac{1}{2}\cdot 20(8+84)=920$　　(2)　$\frac{1}{2}\cdot 17(80+0)=680$

2．次のような等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n および S_{10} を求めよ。

(1)　初項 1，公差 4　　　(2)　初項 100，公差 -2

(3)　2，7，12，……　　　(4)　50，46，42，……

解答　(1)　$S_n=n(2n-1)$，$S_{10}=190$　　(2)　$S_n=-n(n-101)$，$S_{10}=910$

(3)　$S_n=\frac{n(5n-1)}{2}$，$S_{10}=245$　　(4)　$S_n=-2n(n-26)$，$S_{10}=320$

(1)　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 4\}=n(2n-1)$

よって　$S_{10}=10(2\cdot 10-1)=190$

(2)　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 100+(n-1)\cdot(-2)\}=-n(n-101)$

よって　$S_{10}=-10(10-101)=910$

(3)　初項は 2，公差は 5 であるから

$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot 5\}=\frac{n(5n-1)}{2}$

よって　$S_{10}=\frac{10(5\cdot 10-1)}{2}=245$

(4)　初項は 50，公差は -4 であるから

$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 50+(n-1)\cdot(-4)\}=-2n(n-26)$

よって　$S_{10}=-2\cdot 10(10-26)=320$

3．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　2，5，8，……，50　　　(2)　90，84，78，……，0

解答　(1)　442　　(2)　720

(1)　初項は 2，公差は 3 であるから，項数を n とすると

$2+(n-1)\cdot 3=50$　　よって　$n=17$

したがって，求める和は　$\frac{1}{2}\cdot 17(2+50)=442$

(2)　初項は 90，公差は -6 であるから，項数を n とすると

$90+(n-1)\cdot(-6)=0$　　よって　$n=16$

したがって，求める和は　$\frac{1}{2}\cdot 16(90+0)=720$

4．次の和を求めよ。

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+20$　　　(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+31$

(3)　$4+5+6+\cdots\cdots+60$　　　(4)　$2+6+10+\cdots\cdots+54$

解答　(1)　210　　(2)　256　　(3)　1824　　(4)　392

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+20=\frac{1}{2}\cdot 20(20+1)=210$

(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+31=1+3+5+\cdots\cdots+(2\cdot 16-1)$

$=16^2=256$

(3)　$4+5+6+\cdots\cdots+60=(1+2+3+\cdots\cdots+60)-(1+2+3)$

$=\frac{1}{2}\cdot 60(60+1)-6$

$=1824$

(4)　$2+6+10+\cdots\cdots+54=2(1+3+5+\cdots\cdots+27)$

$=2\{1+3+5+\cdots\cdots+(2\cdot 14-1)\}$

$=2\cdot 14^2=392$

注意　等差数列の和の公式を用いても，何ら問題はない。

5．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　123，120，117，……，-24　　　(2)　$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，……，$\frac{99}{5}$

解答　(1)　2475　　(2)　990

(1)　初項は 123，公差は -3 であるから，項数を n とすると

$123+(n-1)\cdot(-3)=-24$　　よって　$n=50$

したがって，求める和は　$\frac{1}{2}\cdot 50\{123+(-24)\}=2475$

(2)　$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\cdots\cdots+\frac{99}{5}=\frac{1}{5}(1+2+3+\cdots\cdots+99)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\cdot 99(99+1)$

$=990$

6．1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　　(2)　4 の倍数でない数の和

解答　(1)　1300　　(2)　3750

(1)　求める和は

$4+8+12+\cdots\cdots+100=4(1+2+3+\cdots\cdots+25)$

$=4\times\frac{1}{2}\cdot 25(25+1)$

$=1300$

(2)　求める和は

$1+2+3+\cdots\cdots+100-(4+8+12+\cdots\cdots+100)$

$=\frac{1}{2}\cdot 100(100+1)-1300=5050-1300$

$=3750$

7．20 から 200 までの整数のうち，次のような数の和を求めよ。

(1)　5 の倍数　　(2)　5 で割り切れない数　　(3)　6 で割ると 4 余る数

解答　(1)　4070　　(2)　15840　　(3)　3270

(1)　20 から 200 までの整数のうち，5 の倍数を順に並べると

5×4，5×5，……，5×40

これは初項 20，末項 200，項数 $40-4+1=37$ の等差数列であるから，求める和は

$\frac{1}{2}\cdot 37(20+200)=4070$

注意　<u>**5×4は5の倍数の4番目の数，5×40は5の倍数の40番目の数。4番目から40番目までの間には，何個の項があるか考える。$40-4=36$個だと，4番目を引いてしまっているから，1個加えている。**</u>

<u>**一般的に，第N項と第M項の間にある項の個数は$M-N+1$個である。**</u>

(2)　20 から 200 までの整数全体の和は，初項 20，末項 200，項数 $200-20+1=181$ の等差数列の和であるから　$\frac{1}{2}\cdot 181(20+200)=19910$

よって，求める和は　$19910-4070=15840$

(3)　20 から 200 までの整数のうち，6 で割ると 4 余る数を順に並べると

$6\times 3+4$，$6\times 4+4$，……，$6\times 32+4$

これは初項 22，末項 196，項数 $32-3+1=30$ の等差数列であるから，求める和は

$\frac{1}{2}\cdot 30(22+196)=3270$

8．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

解答　初項 1，公差 2

初項を a，公差を d とする。

$S_{10}=100$ であるから　$\frac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=100$　　よって　$2a+9d=20$　……①

$S_{20}=400$ であるから　$\frac{1}{2}\cdot 20(2a+19d)=400$　　よって　$2a+19d=40$　……②

①，② を解いて　　$a=1$，$d=2$

したがって　　初項は 1，公差は 2

9．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

解答　(1)　第 19 項　　(2)　第 18 項，和 648

一般項を a_n とすると　　$a_n=70+(n-1)\times(-4)=74-4n$

(1)　$a_n<0$ とすると　　$74-4n<0$　　よって　$n>\frac{37}{2}=18.5$　……①

① を満たす最小の自然数 n は　　$n=19$

したがって，第 19 項が初めて負になる。

(2)　(1) の結果から　　$a_1>0$，$a_2>0$，……，$a_{18}>0$，$a_{19}<0$，$a_{20}<0$，……

よって，正のものだけ足せばいいので，初項から第 18 項までの和が最大となる。

また，そのときの和は　$\frac{1}{2}\cdot 18\{2\cdot 70+(18-1)\cdot(-4)\}=648$

10．等差数列 111，117，123，129，…… において，400 と 600 の間にある項の個数を求めよ。また，それらの項の和を求めよ。

解答　個数 33，和 16533

初項が 111，公差が 6 であるから，一般項を a_n とすると

$a_n=111+(n-1)\times 6=6n+105$

$a_n>400$ とすると　　$6n+105>400$　　よって　$n>\frac{295}{6}=49.1\cdots\cdots$　……①

① を満たす最小の自然数 n は　　$n=50$

ゆえに，第 50 項が初めて 400 より大きくなる。

次に，$a_n<600$ とすると　　$6n+105<600$　　よって　$n<\frac{165}{2}=82.5$　……②

② を満たす最大の自然数 n は　　$n=82$

ゆえに，第 82 項までは 600 より小さい。

したがって，求める項の個数は　　$82-50+1=33$

また　　$a_{50}=6\cdot 50+105=405$，　$a_{82}=6\cdot 82+105=597$

よって，求める和は初項 405，末項 597，項数 33 の等差数列の和であるから

$\frac{1}{2}\cdot 33(405+597)=16533$

11．初項が -50，公差が 3 である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n が初めて正となる n の値を求めよ。

解答　$n=35$

$S_n=\frac{1}{2}\cdot n\{2\cdot(-50)+(n-1)\cdot 3\}=\frac{1}{2}n(3n-103)$

$S_n>0$ とすると　　$\frac{1}{2}n(3n-103)>0$　　$n>0$ であるから　　$3n-103>0$

よって　　$n>\frac{103}{3}=34.3\cdots\cdots$　……②

② を満たす最小の自然数 n は　　$n=35$

すなわち，$n=35$ のとき S_n が初めて正となる。