数学演習（数列）Ｈ２７．２．７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1．次の 2 つの等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に現れる数を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の第 n 項を n の式で表せ。

$\{a_n\}$: 7，10，13，……，　　$\{b_n\}$: 6，11，16，……

2．等差数列をなす 3 数があって，その和は 27，積は 693 である。この 3 数を求めよ。

3．次のような和 S を求めよ。

(1)　初項 200，公差 -5，項数 100 の等差数列の和

(2)　第 8 項が 37，第 24 項が 117 の等差数列の第 20 項から第 50 項までの和

4．初項から第 5 項までの和が 445，初項から第 10 項までの和が 765 の等差数列がある。このとき

(1)　この等差数列の一般項を求めよ。

(2)　この等差数列の初項からの和が最大になるのは第何項までの和か。また，そのときの和を求めよ。

5．100 から 200 までの整数のうち，次の数の和を求めよ。

(1)　2 の倍数　　(2)　3 で割って 1 余る数　　(3)　2 または 3 の倍数

6．異なる数 x，y について，数列 $\sqrt{3}$，x，y は等差数列で，数列 x，$\sqrt{3}$，y は等比数列である。このとき，$x=$ ア $\boxed{}$，$y=$ イ $\boxed{}$ である。

7．等比数列 a，$3a^2$，$9a^3$，…… の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq 0$ とする。

8．初項から第 10 項までの和が 6，初項から第 20 項までの和が 18 であるとき，この等比数列の初項から第 30 項までの和を求めよ。

9．次の数列の初項から第 n 項までの和 S を求めよ。

1^2，3^2，5^2，……

10. 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。　1，$1+2$，$1+2+2^2$，……

11. $S_n=2^2+4^2+\cdots\cdots+(2n)^2$ のとき，$A_n=\dfrac{3}{S_1}+\dfrac{5}{S_2}+\cdots\cdots+\dfrac{2n+1}{S_n}$ を求めよ。

12. (1)　$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right)$ を計算せよ。

(2)　次の数列の和を求めよ。

$1\cdot n$，$2\cdot(n-1)$，$3\cdot(n-2)$，……，$(n-1)\cdot 2$，$n\cdot 1$

13. (1)　数列 $\dfrac{1}{1\cdot 3}$，$\dfrac{1}{3\cdot 5}$，$\dfrac{1}{5\cdot 7}$，……，$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ の和を求めよ。

(2)　数列 $1\cdot 1$，$3\cdot 3$，$5\cdot 3^2$，……，$(2n-1)\cdot 3^{n-1}$ の和を求めよ。

14. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2，7，18，35，58，……

15. 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-n$ となる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　和 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ を求めよ。

1．次の２つの等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に現れる数を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の第 n 項を n の式で表せ。

$\{a_n\}$：7，10，13，……，　　$\{b_n\}$：6，11，16，……

解答　$c_n=15n+1$

解説

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の項を書き出すと

$\{a_n\}$：7，10，13，16，19，22，25，28，31，34，37，40，43，46，……

$\{b_n\}$：6，11，16，21，26，31，36，41，46，……

よって，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通な最初の数は 16 であり，また公差はそれぞれ 3，5 であるから，数列 $\{c_n\}$ は初項が 16 で，3 と 5 の最小公倍数 15 を公差とする等差数列をなす。したがって　$c_n=16+(n-1)\cdot 15=15n+1$

別解　$a_n=7+(n-1)\cdot 3=3n+4$，$b_n=6+(n-1)\cdot 5=5n+1$

数列 $\{a_n\}$ の第 m 項と数列 $\{b_n\}$ の第 n 項が等しいとすると

$3m+4=5n+1$　　よって　$3(m+1)=5n$

3 と 5 は互いに素であるから，$m+1$ は 5 の倍数，n は 3 の倍数である。

ゆえに，$n=3k$（k は自然数）と表される。

よって，$\{c_n\}$ は $\{b_n\}$ の第 $3k$ 項であり　$5\cdot 3k+1=15k+1$　　したがって　$c_n=15n+1$

2．等差数列をなす 3 数があって，その和は 27，積は 693 である。この 3 数を求めよ。

解答　7，9，11

解説

公差を d とし，この等差数列をなす 3 数を $a-d$，a，$a+d$ とすると

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=27\\(a-d)a(a+d)=693\end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad \begin{cases}3a=27 & \cdots\cdots ①\\a(a^2-d^2)=693 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

① から　$a=9$　　これを ② に代入して　$d=\pm 2$

よって，求める 3 数は　7，9，11 または 11，9，7

すなわち　7，9，11

ヒント　等差数列をなす 3 数を $a-d$，a，$a+d$ とおくことがポイントである。

別解　等差数列をなす 3 数の数列を a，b，c とすると　$2b=a+c$　……①

また　$a+b+c=27$ ……②，$abc=693$ ……③

① を ② に代入して　$3b=27$　　ゆえに　$b=9$

このとき，①，③ から　$a+c=18$，$ac=77$

よって，a，c は 2 次方程式 $x^2-18x+77=0$ の 2 つの解である。

これを解くと，$(x-7)(x-11)=0$ から　$x=7$，11

すなわち　$(a,\ c)=(7,\ 11)$，$(11,\ 7)$　　したがって，求める 3 数は　7，9，11

3．次のような和 S を求めよ。

(1)　初項 200，公差 −5，項数 100 の等差数列の和

(2)　第 8 項が 37，第 24 項が 117 の等差数列の第 20 項から第 50 項までの和

解答　(1)　$S=-4750$　　(2)　$S=5332$

解説

(1)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 100\{2\cdot 200+(100-1)\cdot(-5)\}=-4750$

(2)　初項を a，公差を d，一般項を a_n とすると，$a_8=37$，$a_{24}=117$ であるから

$a+7d=37$，$a+23d=117$　　これを解いて　$a=2$，$d=5$

初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_{50}=\dfrac{1}{2}\cdot 50\{2\cdot 2+(50-1)\cdot 5\}=6225$，$S_{19}=\dfrac{1}{2}\cdot 19\{2\cdot 2+(19-1)\cdot 5\}=893$

よって　$S=S_{50}-S_{19}=6225-893=5332$

別解　$a_{20}=a+19d=2+19\cdot 5=97$ を初項と考えると，第 20 項から第 50 項までの項数は $50-(20-1)=31$ であるから　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 31\{2\cdot 97+(31-1)\cdot 5\}=5332$

4．初項から第 5 項までの和が 445，初項から第 10 項までの和が 765 の等差数列がある。このとき

(1)　この等差数列の一般項を求めよ。

(2)　この等差数列の初項からの和が最大になるのは第何項までの和か。また，そのときの和を求めよ。

解答　(1)　$-5n+104$　　(2)　第 20 項，和は 1030

解説

(1)　初項を a，公差を d とすると，条件から

$\dfrac{1}{2}\cdot 5(2a+4d)=445$，$\dfrac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=765$

ゆえに　$a+2d=89$，$2a+9d=153$　　これを解いて　$a=99$，$d=-5$

よって，一般項は　$a_n=99+(n-1)\cdot(-5)=-5n+104$

(2)　(1) より，初項が 99 で正，公差は -5 で負であるから，求める和が最大になるのは項がすべて正の数のときである。

$a_n=-5n+104>0$ とすると　$n<\dfrac{104}{5}=20.8$

ゆえに，$a_n>0$ を満たす最大の n は $n=20$ である。

よって，初項から第 20 項までの和が最大で，その和は

$\dfrac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 99+(20-1)\cdot(-5)\}=1030$

別解　初項から第n項までの和をS_nとすると，

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{99+(-5n+104)\}=\dfrac{1}{2}n(-5n+203)$　となり，平方完成して

$S_n=-\dfrac{5}{2}n^2+\dfrac{203}{2}n=-\dfrac{5}{2}\left(n-\dfrac{203}{10}\right)^2+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{203}{10}\right)^2$

となる。S_nは$n=\dfrac{203}{10}$で最小となるが，nは自然数であるから，$\dfrac{203}{10}$に一番近い自然数は$n=20$である。よって，$n=20$で最小となる。

5．100 から 200 までの整数のうち，次の数の和を求めよ。

(1)　2 の倍数　　(2)　3 で割って 1 余る数　　(3)　2 または 3 の倍数

解答　(1)　7650　　(2)　5083　　(3)　10050

解説

(1)　100 から 200 までの 2 の倍数は　$2\cdot 50$，$2\cdot 51$，……，$2\cdot 100$

これは，初項 100，末項 200，項数 51 の等差数列であるから，その和は

$\dfrac{1}{2}\cdot 51(100+200)=7650$

(2)　100 から 200 までで，3 で割って 1 余る数は　$3\cdot 33+1$，$3\cdot 34+1$，……，$3\cdot 66+1$

これは，初項が $3\cdot 33+1=100$，末項が $3\cdot 66+1=199$，項数が 34 の等差数列であるから，その和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 34(100+199)=5083$

(3)　100 から 200 までの 3 の倍数は　$3\cdot 34$，$3\cdot 35$，……，$3\cdot 66$

これは，初項が $3\cdot 34=102$，末項が $3\cdot 66=198$，項数が 33 の等差数列であるから，その和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 33(102+198)=4950$

6 の倍数は $6\cdot 17$，$6\cdot 18$，……，$6\cdot 33$ であるから，その和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 17(102+198)=2550$

これと (1) から，求める和は　（２の倍数の和）＋（３の倍数の和）－（６の倍数の和）

つまり　$7650+4950-2550=10050$

6．異なる数 x，y について，数列 $\sqrt{3}$，x，y は等差数列で，数列 x，$\sqrt{3}$，y は等比数列である。このとき，$x=$ア$\boxed{}$，$y=$イ$\boxed{}$ である。

解答　（ア）　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（イ）　$-2\sqrt{3}$

解説

数列 $\sqrt{3}$，x，y は等差数列であるから，等差中項の関係から　$2x=\sqrt{3}+y$

すなわち　$y=2x-\sqrt{3}$　……①

また，数列 x，$\sqrt{3}$，y は等比数列であるから等比中項の関係から　$(\sqrt{3})^2=xy$

すなわち　$xy=3$　……②

① を ② に代入して整理すると　$2x^2-\sqrt{3}x-3=0$

ゆえに　$(x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})=0$　　よって　$x=\sqrt{3}$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

① から　$x=\sqrt{3}$ のとき　$y=\sqrt{3}$　　$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$y=-2\sqrt{3}$

問題文より，xとyは異なる数であるから　$x=$ア$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y=$イ$-2\sqrt{3}$

7．等比数列 a，$3a^2$，$9a^3$，…… の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

解答　$a\neq\dfrac{1}{3}$ のとき $S_n=\dfrac{a\{1-(3a)^n\}}{1-3a}$，$a=\dfrac{1}{3}$ のとき $S_n=\dfrac{1}{3}n$

解説

初項が a，公比が $3a$ であるから

[1]　公比　$3a\neq 1$ すなわち $a\neq\dfrac{1}{3}$ のとき　$S_n=\dfrac{a\{1-(3a)^n\}}{1-3a}$

[2]　公比　$3a=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{3}$ のとき　$S_n=na=\dfrac{1}{3}n$

8．初項から第 10 項までの和が 6，初項から第 20 項までの和が 18 であるとき，この等比数列の初項から第 30 項までの和を求めよ。

解答　42

解説

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$S_{10}=6$，$S_{20}=18$ であるから　$r\neq 1$

$S_{10}=6$ から　$\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}=6$ ……①　　$S_{20}=18$ から　$\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}=18$ ……②

② から　$\dfrac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r}=18$　　① を代入して　$6(1+r^{10})=18$

ゆえに　$r^{10}=2$

したがって，これと ① から　$S_{30}=\dfrac{a(1-r^{30})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r}$

$$=6\cdot(1+2+2^2)=42$$

9．次の数列の初項から第 n 項までの和 S を求めよ。

$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \cdots\cdots$

解答　$S=\dfrac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

解説

この数列の第 k 項は $(2k-1)^2$ であるから

$$S=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(4n^2-1)=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$$

10. 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。　$1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$

解答　$2^{n+1}-n-2$

解説

与えられた数列の第 k 項を a_k とし，求める和を S_n とする。

a_k　は初項 1，公比 2，項数kの等比数列の和なので

$$a_k=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$$

ゆえに　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$

11. $S_n=2^2+4^2+\cdots\cdots+(2n)^2$ のとき，$A_n=\dfrac{3}{S_1}+\dfrac{5}{S_2}+\cdots\cdots+\dfrac{2n+1}{S_n}$ を求めよ。

解答　$\dfrac{3n}{2(n+1)}$

解説

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

したがって　$A_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{S_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{\frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3n}{2(n+1)}$$

12. (1)　$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right)$ を計算せよ。

(2)　次の数列の和を求めよ。

$1\cdot n,\ \ 2\cdot(n-1),\ \ 3\cdot(n-2),\ \ \cdots\cdots,\ (n-1)\cdot 2,\ \ n\cdot 1$

解答　(1)　$n(n+1)$　　(2)　$\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

解説

(1)　$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right)=\sum_{l=1}^{n}2l=2\sum_{l=1}^{n}l=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(2)　この数列の第 k 項は　$k\{n+(k-1)\cdot(-1)\}=-k^2+(n+1)k$

したがって，求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

13. (1)　数列 $\dfrac{1}{1\cdot 3},\ \dfrac{1}{3\cdot 5},\ \dfrac{1}{5\cdot 7},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ の和を求めよ。

(2)　数列 $1\cdot 1,\ 3\cdot 3,\ 5\cdot 3^2,\ \cdots\cdots,\ (2n-1)\cdot 3^{n-1}$ の和を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{n}{2n+1}$　　(2)　$(n-1)\cdot 3^n+1$

解説

(1)　第 k 項は　$\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$　と表されるから，

求める和を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

(2)　求める和を S とすると

$$S=1\cdot 1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$$

$$3S=\qquad 1\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^n$$

辺々を引くと

$$-2S=1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$=1+\frac{2\cdot 3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot 3^n=-2(n-1)\cdot 3^n-2$$

ゆえに　$S=(n-1)\cdot 3^n+1$

14. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$2,\ 7,\ 18,\ 35,\ 58,\ \cdots\cdots$

解答　$a_n=3n^2-4n+3$

解説

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

$5,\ 11,\ 17,\ 23,\ \cdots\cdots$　　　よって　$b_n=5+(n-1)\cdot 6=6n-1$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)=2+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$

すなわち　$a_n=3n^2-4n+3$　……①

$n=1$ のとき　$3n^2-4n+3=3\cdot 1^2-4\cdot 1+3=2$

$a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-4n+3$

15. 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-n$ となる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　和 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ を求めよ。

解答　(1)　$a_n=4n-3$　　(2)　$n(4n-3)$

解説

(1)　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}=4n-3$　……①

また　$a_1=S_1=2\cdot 1^2-1=1$

ここで，① において $n=1$ とおくと　$a_1=4\cdot 1-3=1$

よって，$n=1$ のときにも ① は成り立つ。

したがって　$a_n=4n-3$

(2)　(1) により　$a_{2k-1}=4(2k-1)-3=8k-7$

よって　$a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(8k-7)=4n(n+1)-7n=n(4n-3)$