数学演習（数列）Ｈ２０．７．７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．等差数列 $\{a_n\}$ について，第10項が -10，初項から第10項までの和が -235 である。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}|a_k|$ を求めよ。

２．等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2=6$，$a_1+a_2+a_3=26$ であるとき，この等比数列の一般項を求めよ。

３．異なる３つの実数 a，b，c があり，a，b，c の順で等差数列，b，c，a の順で等比数列となっている。a，b，c の積が 125 であるとき，a，b，c の値を求めよ。

４．次の和を n を用いて表せ。

(1) $n^2\cdot 1+(n-1)^2\cdot 2+(n-2)^2\cdot 3+\cdots\cdots+2^2\cdot(n-1)+1^2\cdot n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 3^k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+2k}$

5. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n=n^3-3n^2+2$ であるとき，一般項 a_n を求めよ。

6. 数列 $\{a_n\}$: -1 , -4 , 5 , -22 , 59 , -184 , …… について

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ。

7. 数列 $\{a_n\}$: 1 , 2 , 2 , 3 , 3 , 3 , 4 , 4 , 4 , 4 , 5 , 5 , 5 , 5 , 5 , 6 , …… について，以下の問いに答えよ。

(1) この数列において，初めて n が現れるのは第何項か。n を用いて表せ。

(2) この数列の初項から第 400 項までの和を求めよ。

第２回定期考査追試（数列）　Ｈ２０．７．７　（注）和は計算できるところまで計算すること　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

１．等差数列$\{a_n\}$について，第１０項が－１０，初項から第１０項までの和が－２３５である。

(1) 一般項a_nを求めよ。

$a_{10}=a+9d=-10.$

$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\{2\cdot a+9d\}=-235$

$\therefore \begin{cases} a+9d=-10 \\ 2a+9d=-47 \end{cases}$

$\therefore \quad a=-37,\ d=3$

よって　$a_n=-37+3(n-1)$

$=3n-40$

5

(2) 和$\sum_{k=1}^{30}|a_k|$を求めよ。

$a_n=3n-40<0 \quad \therefore n<\frac{40}{3}\fallingdotseq 13.3\cdots$

$\{a_n\}$は初項～第13項は負の数

第14項～第30項は正の数

$\therefore \sum_{k=1}^{30}|a_k|=\sum_{k=1}^{13}(-a_k)+\sum_{k=14}^{30}a_k$

$=-\sum_{k=1}^{13}a_k+\sum_{k=1}^{30}a_k-\sum_{k=1}^{13}a_k$

$=\sum_{k=1}^{30}a_k-2\sum_{k=1}^{13}a_k$

$=\sum_{k=1}^{30}(3k-40)-2\sum_{k=1}^{13}(3k-40)$

$=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 31-40\cdot 30$

$-2(3\cdot\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14-40\cdot 13)=689$

10

２．等比数列$\{a_n\}$について，$a_2=6$，$a_1+a_2+a_3=26$であるとき，この等比数列の一般項を求めよ。

$a_2=ar=6 \quad \cdots ①$

$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2=26 \cdots ②$

②より

$a(1+r+r^2)=26$　②×r

$ar(1+r+r^2)=26r$

①より

$6(1+r+r^2)=26r$

$\therefore \quad 3r^2-10r+3=0$

$(3r-1)(r-3)=0$

$\therefore \quad r=\frac{1}{3},\ 3$

①より

$r=\frac{1}{3}\to a=18$

$r=3\to a=2$

$\therefore$

$a_n=18(\frac{1}{3})^{n-1}$

$2\cdot 3^{n-1}$

10

３．異なる３つの実数a,b,cがあり，a,b,cの順で等差数列，b,c,aの順で等比数列となっている。a,b,cの積が１２５であるとき，a,b,cの値を求めよ。

$\begin{cases} a+c=2b & -① \\ c^2=ba & -② \\ abc=125 & -③ \end{cases}$

10

③に②を代入して

$c^3=125$

cは実数より

$c=5$

①より

$a+5=2b$

$a=2b-5$

②に

$ba=25$

より代入して

$b(2b-5)=25$

$\therefore 2b^2-5b-25=0$

$(2b+5)(b-5)=0$

$\therefore b=-\frac{5}{2},\ 5$

$c=5$より，$b\neq 5$

$\therefore b=-\frac{5}{2},\ a=-10$

$\therefore (a,b,c)=(-10,-\frac{5}{2},5)$

４．次の和をnを用いて表せ。

(1) $n^2\cdot 1+(n-1)^2\cdot 2+(n-2)^2\cdot 3+\cdots\cdots+2^2\cdot(n-1)+1^2\cdot n$　頭を使う！！

$=1^2\cdot n+2^2\cdot(n-1)+\cdots\cdots+(n-2)^2\cdot 3+(n-1)^2\cdot 2+n^2\cdot 1$

↑ 順番ひっくり返す

$=\sum_{k=1}^{n}k^2(n-k+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k^2-k^3\}$

$=(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{2(2n+1)-3n\}$

$=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

10

(2) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 3^k$　$=S$とおく

$S=1\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$

$3S=\quad 1\cdot 3^2+\cdots+(2n-3)\cdot 3^n+(2n-1)\cdot 3^{n+1}$

$-2S=1\cdot 3+\underbrace{2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 3^n}_{\text{初 }2\cdot 3^2\text{，比 }3\text{，数 }n-1}-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$

$=3+\frac{2\cdot 3^2(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$

$=\frac{6+2\cdot 3^{n+1}-2\cdot 3^2-2(2n-1)\cdot 3^{n+1}}{2}$

$=\frac{-12+(2-4n+2)\cdot 3^{n+1}}{2}$

$=\frac{-12+4(1-n)\cdot 3^{n+1}}{2}=-6+2(1-n)\cdot 3^{n+1}$

$\therefore \quad S=(n-1)3^{n+1}+3$

10

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+2k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(2n+3)}{2(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

10

5．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n=n^3-3n^2+2$ であるとき，一般項 a_n を求めよ。

$n\geqq 2$ の時

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^3-3n^2+2)-\{(n-1)^3-3(n-1)^2+2\}$$
$$=3n^2-9n+4\ \cdots(*)$$

10

$n=1$ の時

$$a_1=S_1=1^3-3\cdot1^2+2=0.$$

これは(*)に $n=1$ を代入した結果と異なる

$$\therefore\ a_n=\begin{cases}3n^2-9n+4 & (n\geqq2)\\ 0 & (n=1)\end{cases}$$

6．数列 $\{a_n\}$：$-1,\ -4,\ 5,\ -22,\ 59,\ -184,\ \cdots$ について

(1) 一般項 a_n を求めよ。

階差 $\{b_n\}$：$-3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243\ \cdots$

一般項 $b_n=(-3)^n$

$n\geqq2$ の時

$$a_n=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k$$
$$=-1+\frac{(-3)\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}$$
$$=\frac{-4-3-(-3)^n}{4}$$
$$=\frac{-7-(-3)^n}{4}$$

5

よってに $n=1$ を代入すると $\dfrac{-7-(-3)}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1$

で成り立つ $\quad\therefore\ a_n=\dfrac{-7-(-3)^n}{4}$

(2) 初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ。

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{-7-(-3)^k}{4}$$

5

$$=-\frac{7}{4}n-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(-3)^k$$
$$=-\frac{7}{4}n-\frac{1}{4}\cdot\frac{(-3)\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}$$
$$=-\frac{7}{4}n-\frac{1}{4}\cdot\frac{-3-(-3)^{n+1}}{4}$$
$$=\frac{-28n+3+(-3)^{n+1}}{16}$$

7．数列 $\{a_n\}$：1 | 2, 2 | 3, 3, 3 | 4, 4, 4, 4 | 5, 5, 5, 5, 5 | 6, …について以下の問いに答えよ。

(1) この数列において，初めて n が現れるのは第何項か。n を用いて表せ。

初めて n が現れるのは n 群の1番目.

1 | 2, 2 | 3, 3, 3 | ⋯ | $n-1$ | 1 個

1コ　2コ　3コ　⋯　$n-1$コ

∴

$$1+2+\cdots+(n-1)+1$$

5

$$=\frac{1}{2}(n-1)n+1=\frac{n^2-n+2}{2}$$

(2) この数列の初項から第400項までの和を求めよ。

400項が第何群の何番目か求める.

n 群にはいるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n+1\leqq400<\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

$$\therefore\ (n-1)n\leqq798<n(n+1)$$

$n=28$ として

$27\cdot28=756,\ 28\cdot29=812$

400項は28群で，28群の1番目は379項より，第400項は第28群の22番目

k 群内の和は k が k 個より k^2

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{27}k^2+28\times22$$
$$=\frac{1}{6}\cdot27\cdot28\cdot55+616$$
$$=7546$$

10