数学演習（数列）Ｈ２１．９．１７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１． 第 3 項が 70，第 8 項が 55 である等差数列 $\{a_n\}$ について

(1) この数列の一般項を求めよ。

(2) 19 は第何項か。また，第何項が初めて負の数になるか。

２．(1) 等差数列 60，54，48，…… の初項から第 20 項までの和を求めよ。

(2) 等差数列 -20，-18，-16，……，28 の和を求めよ。

３．初項 70 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 10 項から第 20 項までの和が 0 であるとする。

(1) 第何項から負の数となるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

４．第 3 項が 18，第 5 項が 162である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

５． 初項 a，公比 r がともに実数の等比数列について，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_3=31$，$S_6=3906$ であった。このとき a，r の値を求めよ。

６．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k^2+1)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}(3n-k+1)$

7. 次の数列の初項から第 n 項までの和 S を求めよ。

(1) $1\cdot1,\ 2\cdot4,\ 3\cdot7,\ 4\cdot10,\ \cdots\cdots$

(2) $2,\ 2+6,\ 2+6+18,\ 2+6+18+54,\ \cdots\cdots$

8. 一般項が $2n\cdot3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\ \cdots\cdots\ +2n\cdot3^{n-1}$$

を求めよ。

9. 数列 $\dfrac{1}{2\cdot4},\ \dfrac{1}{4\cdot6},\ \dfrac{1}{6\cdot8},\ \cdots\cdots$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

10. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。　　$5,\ 7,\ 11,\ 19,\ 35,\ \cdots\cdots$

11. 初項から第 n 項までの和が $2n^2-3n$ である数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。

12. 数列 $\dfrac{1}{1},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \cdots\cdots$ について

(1) $\dfrac{5}{8}$ は第何項か。

(2) この数列の第 800 項を求めよ。

(3) この数列の初項から第 800 項までの和を求めよ。

数学演習（数列）Ｈ２１．９．１７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１． 第 3 項が 70，第 8 項が 55 である等差数列 $\{a_n\}$ について

(1)　この数列の一般項を求めよ。

(2)　19 は第何項か。また，第何項が初めて負の数になるか。

解答　(1)　$a_n=-3n+79$　　(2)　順に 第 20 項，第 27 項

(1)　初項を a，公差を d とすると

$a_3=70$ から　$a+2d=70$　…… ①

$a_8=55$ から　$a+7d=55$　…… ②

② − ① から　$5d=-15$　　ゆえに　$d=-3$

これを ① に代入して　$a+2\cdot(-3)=70$　　よって　$a=76$

ゆえに　$a_n=76+(n-1)\cdot(-3)=-3n+79$

(2)　(1) から，$a_n=19$ とすると　$-3n+79=19$

ゆえに　$n=20$　　よって，19 は　第 20 項

また，$a_n<0$ とすると　$-3n+79<0$

ゆえに　$n>\dfrac{79}{3}=26.3\cdots$

これを満たす最小の自然数は　$n=27$

よって，第 27 項が初めて負の数になる。

２． (1)　等差数列 60，54，48，…… の初項から第 20 項までの和を求めよ。

(2)　等差数列 −20，−18，−16，……，28 の和を求めよ。

解答　(1)　60　　(2)　100

(1)　初項 60，公差 −6，項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 60+(20-1)\cdot(-6)\}=60$$

(2)　初項 −20，公差 2 から，末項 28 が第 n 項であるとすると

$$-20+(n-1)\cdot 2=28$$

すなわち　$2n-22=28$　　ゆえに　$n=25$

よって，初項 −20，末項 28，項数 25 の等差数列の和を求めて

$$\frac{1}{2}\cdot 25(-20+28)=100$$

３． 初項 70 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 10 項から第 20 項までの和が 0 であるとする。

(1)　第何項から負の数となるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

解答　(1)　第 16 項　　(2)　第 14 項または第 15 項，最大値は 525

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると　$a_n=70+(n-1)d$　…… ①

第 10 項から第 20 項までの 11 項の和が 0 であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 11(a_{10}+a_{20})=0\quad \text{すなわち}\quad a_{10}+a_{20}=0$$

① から　$(70+9d)+(70+19d)=0$　　よって　$d=-5$

① に代入して　$a_n=70+(n-1)\cdot(-5)=-5n+75$

$a_n<0$ とすると　$-5n+75<0$

ゆえに，$n>15$ から　第 16 項

(2)　この等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) より，a_1 から a_{14} までは正の数，a_{15} は 0，a_{16} からは負の数となるから，S_n は $n=14$ または $n=15$ のとき最大となり，最大値は

$$S_{14}=S_{15}=\frac{1}{2}\cdot 14\{2\cdot 70+13\cdot(-5)\}=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 75=525$$

よって，初項から第 14 項，または第 15 項までの和が最大で，最大値は 525

４． 第 3 項が 18，第 5 項が 162である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答　初項 2，公比 3 または 初項 2，公比 −3

初項を a，公比を r とする。

第 3 項が 18 であるから　$ar^2=18$　…… ①

第 5 項が 162 であるから　$ar^4=162$　…… ②

② から　$ar^2\cdot r^2=162$　　① を代入して　$18r^2=162$

よって　$r^2=9$　　ゆえに　$r=\pm 3$

$r^2=9$ を ① に代入すると　$9a=18$　　よって　$a=2$

したがって　初項 2，公比 3 または 初項 2，公比 −3

５． 初項 a，公比 r がともに実数の等比数列について，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_3=31$，$S_6=3906$ であった。このとき a，r の値を求めよ。

解答　$a=1$，$r=5$

$r=1$ のとき　$S_3=3a$，$S_6=6a$

$3a=31$，$6a=3906$ を同時に満たす a は存在しないから不適。

$r\fallingdotseq 1$ のとき，$S_3=31$ から　$\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=31$　…… ①

また，$S_6=3906$ から　$\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=3906$　…… ②

② から　$\dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=3906$

これに ① を代入すると　$31(r^3+1)=3906$

よって　$r^3=125$　　r は実数であるから　$r=5$

$r=5$，① から　$a=1$

６． 次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)$　　　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3n-k+1)$

解答　(1)　$\dfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$　　(2)　$\dfrac{1}{2}n(5n+1)$

(1)

$$\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k)=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2\}$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n}(3n-k+1)=\sum_{k=1}^{n}(3n+1)-\sum_{k=1}^{n}k=(3n+1)n-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}n\{2(3n+1)-(n+1)\}=\frac{1}{2}n(5n+1)$$

7. 次の数列の初項から第 n 項までの和 S を求めよ。

(1)　$1\cdot 1,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 7,\ 4\cdot 10,\ \cdots\cdots$

(2)　$2,\ 2+6,\ 2+6+18,\ 2+6+18+54,\ \cdots\cdots$

解答　(1)　$S=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n-1)$　　(2)　$S=\dfrac{3^{n+1}}{2}-n-\dfrac{3}{2}$

(1)　この数列の第 k 項は　　$k(3k-2)$

ゆえに　$S=\sum_{k=1}^{n}k(3k-2)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-2k)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

$=3\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-2\}=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n-1)$

(2)　この数列の第 k 項は　　$2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2\cdot 3^{k-1}$

これは，初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 k 項までの和であるから

$\dfrac{2(3^k-1)}{3-1}=3^k-1$

ゆえに　$S=\sum_{k=1}^{n}(3^k-1)=\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1=\dfrac{3(3^n-1)}{3-1}-n=\dfrac{3^{n+1}}{2}-n-\dfrac{3}{2}$

8. 一般項が $2n\cdot 3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$S=2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+\cdots\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$

を求めよ。

解答　$S=\dfrac{1}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n+1\}$

$S=2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+\cdots\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$

両辺に 3 を掛けると

$3S=\qquad 2\cdot 3+4\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n$

辺々引くと

$S-3S=2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}-2n\cdot 3^n$

$=2(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1})-2n\cdot 3^n$

$=2\cdot\dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-2n\cdot 3^n$

$=(1-2n)\cdot 3^n-1$

ゆえに，$-2S=(1-2n)\cdot 3^n-1$ であるから

$S=\dfrac{1}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n+1\}$

9. 数列 $\dfrac{1}{2\cdot 4},\ \dfrac{1}{4\cdot 6},\ \dfrac{1}{6\cdot 8},\ \cdots\cdots$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

解答　$\dfrac{n}{4(n+1)}$

この数列の第 k 項は　$\dfrac{1}{2k(2k+2)}$　すなわち　$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{k(k+1)}$

$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ であるから

$\dfrac{1}{2k(2k+2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

この式に $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入して，辺々加えると

$\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{n}{4(n+1)}$

10. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。　$5,\ 7,\ 11,\ 19,\ 35,\ \cdots\cdots$

解答　$a_n=2^n+3$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

数列 $\{b_n\}$ は，2，4，8，16，…… であるから，初項 2，公比 2 の等比数列である。

ゆえに　$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3$

また，初項は $a_1=5$ であるから，上の式は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上により，一般項 a_n は　$a_n=2^n+3$

11. 初項から第 n 項までの和が $2n^2-3n$ である数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。

解答　$a_n=4n-5$

$S_n=2n^2-3n$ から　$a_1=S_1=2\cdot 1^2-3\cdot 1=-1$　……①

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n)-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=(2n^2-3n)-(2n^2-7n+5)=4n-5$　……②

② で $n=1$ とすると $a_1=-1$ となり，① に一致する。

よって，② は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上から　$a_n=4n-5$

12. 数列 $\dfrac{1}{1},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \cdots\cdots$ について

(1)　$\dfrac{5}{8}$ は第何項か。　　(2)　この数列の第 800 項を求めよ。

(3)　この数列の初項から第 800 項までの和を求めよ。

解答　(1)　第 31 項　　(2)　$\dfrac{39}{40}$　　(3)　790

$\dfrac{1}{1}\ \Big|\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\ \Big|\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{3},\ \dfrac{5}{3}\ \Big|\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{7}{4}\ \Big|\ \dfrac{1}{5},\ \cdots\cdots$

のように群に分ける。

(1)　$\dfrac{5}{8}$ は第 8 群の 3 番目の項である。

$\sum_{k=1}^{7}k+3=31$ であるから　　第 31 項

(2)　第 800 項が第 n 群に含まれるとすると　$\sum_{k=1}^{n-1}k<800\leqq\sum_{k=1}^{n}k$

よって　$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は　$n=40$

$800-\sum_{k=1}^{39}k=20$ であるから　$\dfrac{39}{40}$

(3)　第 n 群の n 個の分数の和は　$\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2k-1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\cdot n^2=n$

ゆえに，求める和は

$\sum_{k=1}^{39}k+\left(\dfrac{1}{40}+\dfrac{3}{40}+\dfrac{5}{40}+\cdots\cdots+\dfrac{39}{40}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 39\cdot 40+\dfrac{1}{40}\left\{\dfrac{1}{2}\cdot 20(1+39)\right\}=790$