数学演習（数列）Ｈ２１．９．１０　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．第 5 項が 3，第 10 項が 18 である等差数列 $\{a_n\}$ において

(1)　初項と公差を求めよ。　(2)　第 21 項を求めよ。

(3)　初めて 1000 を超えるのは，第何項か。

２．次の和を求めよ。

(1)　初項 -2，末項 53，項数 12 の等差数列の和 S

(2)　初項 5，公差 -2 の等差数列の初項から第 17 項までの和 S

(3)　等差数列 9，13，17，……，113 の和 S

３．次のような等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

(1)　第 3 項が 18，第 5 項が 162　(2)　第 2 項が 4，第 5 項が -32

４．次の和を求めよ。

(1)　初項 5，公比 2，項数 8 の等比数列の和 S

(2)　初項 4，公比 -3 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n

(3)　等比数列 2，$2x$，$2x^2$，$2x^3$，…… の初項から第 n 項までの和 S_n

５．次の和を求めよ。

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-3)$　(2)　$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

６．(1)　数列 $1\cdot1$，$2\cdot7$，$3\cdot13$，……，$n(6n-5)$ の和を求めよ。

(2)　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7,\ \cdots\cdots$

7. 数列 $\frac{1}{2\cdot4}$, $\frac{1}{4\cdot6}$, $\frac{1}{6\cdot8}$, ……, $\frac{1}{2n(2n+2)}$ の和 S を求めよ。

8. 和 $S=1+2\cdot2+3\cdot2^2+ \cdots\cdots +n\cdot2^{n-1}$ を求めよ。

9. 数列 $\{a_n\}$: 5, 8, 14, 23, 35, 50, …… の一般項 a_n を求めよ。

10. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表されるとき，一般項 a_n をそれぞれ求めよ。

(1) $S_n=3n(n+5)$

(2) $S_n=n^2+2$

11. 数列 $1^2\cdot n$, $2^2\cdot(n-1)$, $3^2\cdot(n-2)$, ……, $n^2\cdot1$ がある。

(1) この数列の第 k 項を n と k の式で表せ。

(2) この数列の和を求めよ。

12. 次のように，正の奇数の列を第 n 番目の群が n 個の数を含むように分ける。

$|1|3,\ 5|7,\ 9,\ 11|13,\ 15,\ 17,\ 19|\cdots\cdots$

(1) 第 n 番目 $(n\geqq2)$ の群の最初の数を求めよ。

(2) 第 20 番目の群に入るすべての数の和を求めよ。

1．第 5 項が 3，第 10 項が 18 である等差数列 $\{a_n\}$ において

(1)　初項と公差を求めよ。　　(2)　第 21 項を求めよ。

(3)　初めて 1000 を超えるのは，第何項か。

解答　(1)　初項 -9，公差 3　(2)　51　(3)　第 338 項

(1)　初項を a，公差を d とすると

$a_5=3$ であるから　$a+4d=3$　…… ①

$a_{10}=18$ であるから　$a+9d=18$　…… ②

①，② を解いて　$a=-9$，$d=3$

よって　初項 -9，公差 3

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=-9+(n-1)\cdot 3=3n-12$

よって，第 21 項は　$a_{21}=3\cdot 21-12=51$

(3)　(2) から　$a_n>1000$ とすると　$3n-12>1000$

ゆえに　$n>\dfrac{1012}{3}=337.3\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=338$　　よって　第 338 項

2．次の和を求めよ。

(1)　初項 -2，末項 53，項数 12 の等差数列の和 S

(2)　初項 5，公差 -2 の等差数列の初項から第 17 項までの和 S

(3)　等差数列 9，13，17，……，113 の和 S

解答　(1)　$S=306$　(2)　$S=-187$　(3)　$S=1647$

(1)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 12(-2+53)=6\cdot 51=306$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 17\{2\cdot 5+(17-1)\cdot(-2)\}$

$=17\cdot(5-16)=17\cdot(-11)=-187$

(3)　この等差数列の初項は 9，公差は 4 である。

一般項は　$9+(n-1)\cdot 4=4n+5$

$4n+5=113$ とすると　$n=27$

よって，113 は第 27 項であるから

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 27(9+113)=27\cdot 61=1647$

3．次のような等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

(1)　第 3 項が 18，第 5 項が 162　　(2)　第 2 項が 4，第 5 項が -32

解答　(1)　初項 2，公比 3 または 初項 2，公比 -3

(2)　初項 -2，公比 -2

初項を a，公比を r とする。

(1)　第 3 項が 18 であるから　$ar^2=18$　…… ①

第 5 項が 162 であるから　$ar^4=162$　…… ②

② から　$ar^2\cdot r^2=162$　① を代入して　$18r^2=162$

よって　$r^2=9$　ゆえに　$r=\pm 3$

$r^2=9$ を ① に代入すると　$9a=18$　よって　$a=2$

したがって　初項 2，公比 3 または 初項 2，公比 -3

(2)　第 2 項が 4 であるから　$ar=4$　…… ③

第 5 項が -32 であるから　$ar^4=-32$　…… ④

④ から　$ar\cdot r^3=-32$　③ を代入して　$4r^3=-32$

よって　$r^3+8=0$　ゆえに　$(r+2)(r^2-2r+4)=0$

r は実数であるから　$r=-2$

$r=-2$ を ③ に代入すると　$-2a=4$　よって　$a=-2$

したがって　初項 -2，公比 -2

4．次の和を求めよ。

(1)　初項 5，公比 2，項数 8 の等比数列の和 S

(2)　初項 4，公比 -3 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n

(3)　等比数列 2，$2x$，$2x^2$，$2x^3$，…… の初項から第 n 項までの和 S_n

解答　(1)　$S=1275$　(2)　$S_n=1-(-3)^n$

(3)　$x\neq 1$ のとき $S_n=\dfrac{2(x^n-1)}{x-1}$，$x=1$ のとき $S_n=2n$

(1)　$S=\dfrac{5(2^8-1)}{2-1}=5(256-1)=1275$

(2)　$S_n=\dfrac{4\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=1-(-3)^n$

(3)　初項は 2，公比は x であるから

$x\neq 1$ のとき　$S_n=\dfrac{2(x^n-1)}{x-1}$

$x=1$ のとき　$S_n=2+2+\cdots\cdots+2=n\cdot 2=2n$

5．次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-3)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

解答　(1)　$\dfrac{1}{6}n(2n^2-3n-23)$　(2)　$\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-3)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k-3)=\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}3$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)-3n$

$=\dfrac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-6(n+1)-18\}$

$=\dfrac{1}{6}n(2n^2-3n-23)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$

$=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$

$=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

6．(1)　数列 $1\cdot 1$，$2\cdot 7$，$3\cdot 13$，……，$n(6n-5)$ の和を求めよ。

(2)　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

1，$1+3$，$1+3+5$，$1+3+5+7$，……

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}n(n+1)(4n-3)$　(2)　$\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(1)　第 k 項 a_k は　$a_k=k(6k-5)$

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(6k-5)=\sum_{k=1}^{n}(6k^2-5k)=6\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k$

$=6\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{2}n(n+1)(4n-3)$

(2)　第 k 項 a_k は

$a_k=1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)$

$=\dfrac{1}{2}k\{2\cdot 1+(k-1)\cdot 2\}=k^2$

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

7. 数列 $\dfrac{1}{2\cdot4}$, $\dfrac{1}{4\cdot6}$, $\dfrac{1}{6\cdot8}$, ……, $\dfrac{1}{2n(2n+2)}$ の和 S を求めよ。

解答　$S=\dfrac{n}{4(n+1)}$

第 k 項は $\dfrac{1}{2k(2k+2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$ と表されるから

$$S=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n}{4(n+1)}$$

8. 和 $S=1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}$ を求めよ。

解答　$S=(n-1)\cdot2^n+1$

$$S=1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+\quad n\cdot2^{n-1}$$

両辺に 2 を掛けると

$$2S=\quad 2+2\cdot2^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$$

辺々を引くと

$$S-2S=1+\ 2+\ 2^2+\cdots\cdots+\quad 2^{n-1}-n\cdot2^n$$

$$=(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})-n\cdot2^n$$

$$=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}-n\cdot2^n=2^n-n\cdot2^n-1$$

$$=(1-n)\cdot2^n-1$$

よって　$-S=(1-n)\cdot2^n-1$

したがって　$S=(n-1)\cdot2^n+1$

9. 数列 $\{a_n\}$: 5, 8, 14, 23, 35, 50, …… の一般項 a_n を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+10)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は

3, 6, 9, 12, 15, ……

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=3n$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}3k=5+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{2}(3n^2-3n+10)$$

この式に $n=1$ を代入すると $a_1=\dfrac{1}{2}(3\cdot1^2-3\cdot1+10)=5$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項 a_n は　$a_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+10)$

10. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表されるとき，一般項 a_n をそれぞれ求めよ。

(1)　$S_n=3n(n+5)$　　　(2)　$S_n=n^2+2$

解答　(1)　$a_n=6n+12$　　(2)　$a_1=3$，$n\geqq2$ のとき $a_n=2n-1$

(1)　$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=3n(n+5)-3(n-1)\{(n-1)+5\}$$

$$=6n+12\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=3\cdot1\cdot(1+5)=18$

これは，① で $n=1$ とおいた値に等しい。

よって，一般項 a_n は　$a_n=6n+12$

(2)　$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=n^2+2-\{(n-1)^2+2\}$$

$$=2n-1$$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=1^2+2=3$

よって，一般項 a_n は

$a_1=3$，$n\geqq2$ のとき $a_n=2n-1$

11. 数列 $1^2\cdot n$, $2^2\cdot(n-1)$, $3^2\cdot(n-2)$, ……, $n^2\cdot1$ がある。

(1)　この数列の第 k 項を n と k の式で表せ。

(2)　この数列の和を求めよ。

解答　(1)　$k^2(n-k+1)$　　(2)　$\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

(1)　数列 n, $n-1$, $n-2$, ……, 1 は，初項 n，公差 -1 の等差数列であるから，

第 k 項は　$n+(k-1)\cdot(-1)=n-k+1$

また，数列 1^2, 2^2, 3^2, ……, n^2 の第 k 項は　k^2

よって，与えられた数列の第 k 項は　$k^2(n-k+1)$

(2)　求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(n-k+1)=\sum_{k=1}^{n}\{-k^3+(n+1)k^2\}$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{-3n+2(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

12. 次のように，正の奇数の列を第 n 番目の群が n 個の数を含むように分ける。

| 1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19 | ……

(1)　第 n 番目 ($n\geqq2$) の群の最初の数を求めよ。

(2)　第 20 番目の群に入るすべての数の和を求めよ。

解答　(1)　n^2-n+1　　(2)　8000

(1)　第 k 番目の群は k 個の数を含むから，第 n 番目の群の最初の数は

$\{1+2+\cdots\cdots+(n-1)\}+1=\dfrac{1}{2}n(n-1)+1$ (番目) の奇数である。

よって　$2\cdot\left\{\dfrac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=n^2-n+1$

(2)　第 20 番目の群の最初の数は　$20^2-20+1=381$

第 20 番目の群は，初項 381，公差 2，項数 20 の等差数列であるから

$$\frac{20}{2}\{2\cdot381+(20-1)\cdot2\}=20(381+19)=8000$$