第２回定期考査（数列）　Ｈ２０．７．３　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．等差数列$\{a_n\}$について，第１０項が２０，初項から第１０項までの和が３３５である。

(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) 和$\sum_{k=1}^{30}|a_k|$を求めよ。

２．等比数列$\{a_n\}$について，$a_1+a_4=7$, $a_2+a_3=3$ であるとき，この等比数列の一般項を求めよ。

３．異なる３つの実数 a, b, c があり，a, b, c の順で等差数列，b, c, a の順で等比数列となっている。a, b, c の和が１８であるとき，a, b, c の値を求めよ。

４．次の和をnを用いて表せ。

(1) $n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+\cdots\cdots+2\cdot(n-1)+1\cdot n$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

5．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n=n^3-3n+2$であるとき，一般項 a_nを求めよ。

6．数列 $\{a_n\}$：1，−1，3，−5，11，−21，43，… について

(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ。

7．数列$\{a_n\}$：1，1，2，1，2，3，1，2，3，4，1，2，3，4，5，1，2，…について以下の問いに答えよ。

(1) この数列において，初めてnが現れるのは第何項か。nを用いて表せ。

(2) この数列の第５００項を求めよ。

１．等差数列$\{a_n\}$について，第１０項が２０，初項から第１０項までの和が３３５である。

(1) 一般項a_nを求めよ。

初項を a，公差を d とする

条件より

$a_{10}=a+9d=20$

$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=335$

$\therefore \begin{cases} a+9d=20 \\ 2a+9d=67 \end{cases}$

5

よって $a=47$，$d=-3$

$\therefore a_n=47+(n-1)(-3)$

$=-3n+50$

(2) 和$\sum_{k=1}^{30}|a_k|$を求めよ。

$a_n>0$ を解くと $-3n+50>0$　$\therefore n<\frac{50}{3}\fallingdotseq 16.3$

よって 数列$\{a_n\}$は 第16項まで正の数 第17項より負の数 となる

よって $|a_k|=\begin{cases} a_k & (k\leqq 16) \\ -a_k & (k\geqq 17) \end{cases}$ となるので

$\sum_{k=1}^{30}|a_k|=\sum_{k=1}^{16}a_k+\sum_{k=17}^{30}(-a_k)$

$=\sum_{k=1}^{16}a_k-\sum_{k=17}^{30}a_k$

$=\sum_{k=1}^{16}a_k-\left(\sum_{k=1}^{30}a_k-\sum_{k=1}^{16}a_k\right)$

$=2\sum_{k=1}^{16}a_k-\sum_{k=1}^{30}a_k$

$=2\sum_{k=1}^{16}(-3k+50)-\sum_{k=1}^{30}(-3k+50)$

$=2\left(-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 17+50\cdot 16\right)-\left(-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 31+50\cdot 30\right)$

$=679$

10

２．等比数列$\{a_n\}$について，$a_1+a_4=7$，$a_2+a_3=3$であるとき，この等比数列の一般項を求めよ。

初項を a，公比を r とする

$\begin{cases} a_1+a_4=a+ar^3=7 & \cdots (i) \\ a_2+a_3=ar+ar^2=3 & \cdots (ii) \end{cases}$

(i)より $a(1+r^3)=7$　よって $a(1+r)(1-r+r^2)=7$

(ii)より $ar(1+r)=3$ であるので 上式の両辺に r をかけて

$ar(1+r)\cdot(1-r+r^2)=7r$

$\therefore 3(1-r+r^2)=7r$

整理して $3r^2-10r+3=0$

$(3r-1)(r-3)=0$

$\therefore r=\frac{1}{3},\ 3$

(i)より $r=\frac{1}{3}$の時 $a=\frac{27}{4}$，$r=3$の時 $a=\frac{1}{4}$

$\therefore a_n=\frac{27}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$\frac{1}{4}\cdot 3^{n-1}$

10

３．異なる３つの実数a,b,cがあり，a,b,cの順で等差数列，b,c,aの順で等比数列となっている。a,b,cの和が１８であるとき，a,b,cの値を求めよ。

等差中項より $2b=a+c$ $\cdots$ (i)

等比中項より $c^2=ab$ $\cdots$ (ii)

条件より $a+b+c=18$ $\cdots$ (iii)

(i)を(iii)に代入して

$3b=18$　$\therefore b=6$

よって

(i)より $a+c=12$

(ii)より $c^2=6a$

$a=12-c$ として，代入すると

$c^2=6(12-c)$

$\therefore c^2-6c-72=0$

$(c-6)(c+12)=0$

$\therefore c=6,\ -12$

ここで $b=6$ より $c=6$ は不適

$\therefore c=-12$ より

$a=24$

$\therefore \begin{cases} a=24 \\ b=6 \\ c=-12 \end{cases}$

10

４．次の和をnを用いて表せ。

(1) $n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+\cdots\cdots+2\cdot(n-1)+1\cdot n$

一般項は $k\times\{n-(k-1)\}$

よって

$\sum_{k=1}^{n}k\{n-(k-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}$

$=(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

10

(2) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot 3^k$

$\sum_{k=1}^{n}k\cdot 3^k=S$ とおく

すると

$S=1\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+n\cdot 3^n$

$3S=\qquad 1\cdot 3^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 3^n+n\cdot 3^{n+1}$　$(-$

$-2S=1\cdot 3+1\cdot 3^2+\cdots\cdots+1\cdot 3^n-n\cdot 3^{n+1}$

$=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^{n+1}$

$=\frac{3^{n+1}-3}{2}-n\cdot 3^{n+1}$

$=\frac{3^{n+1}-3-2n\cdot 3^{n+1}}{2}=\frac{-3+(1-2n)\cdot 3^{n+1}}{2}$

よって $-2S=\frac{-3+(1-2n)\cdot 3^{n+1}}{2}$ より

$S=\frac{1}{4}\{3+(2n-1)\cdot 3^{n+1}\}$

10

(3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$

10

5．数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする。$S_n=n^3-3n+2$であるとき，一般項a_nを求めよ。

$n \geqq 2$の時

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^3-3n+2) - \{(n-1)^3 - 3(n-1)+2\}$

$= (n^3-3n+2) - (n^3-3n^2+3n-1-3n+3+2)$

$= 3n^2-3n-2 \cdots (*)$

$n=1$の時

$a_1 = S_1 = 1^3 - 3\cdot 1+2 = 0$

これは(*)のnに1を代入した結果と異なる

以上より

$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ 3n^2-3n-2 & (n\geqq 2)\end{cases}$

10

6．数列$\{a_n\}$：1，−1，3，−5，11，−21，43，… について

(1) 一般項を求めよ。

数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると

$\{b_n\}: -2, 4, -8, 16, -32, 64, \cdots$

数列$\{b_n\}$は初項-2，公比-2の等比数列

$\therefore b_n = (-2)\cdot(-2)^{n-1}$

よって

$n\geqq 2$の時

$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$= 1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)(-2)^{k-1}$

$= 1+\frac{(-2)\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)} = \frac{3-2-(-2)^n}{3}$

$= \frac{1-(-2)^n}{3}$

この式に$n=1$を代入すると

$\frac{1-(-2)}{3} = \frac{3}{3} = 1$

より，$n=1$も成り立つ。

以上より

$a_n = \frac{1-(-2)^n}{3}$

5

(2) 初項から第n項までの和をnを用いて表せ。

$\sum_{k=1}^{n} a_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1-(-2)^k}{3}$

$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{1-(-2)^k\}$

$= \frac{1}{3}\left(n - \frac{(-2)\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(n - \frac{-2-(-2)^{n+1}}{3}\right)$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3n+2+(-2)^{n+1}}{3}$

$= \frac{3n+2+(-2)^{n+1}}{9}$

5

7．数列$\{a_n\}$：1，1，2，1，2，3，1，2，3，4，1，2，3，4，5，1，2，…について以下の問いに答えよ。

(1) この数列において，初めてnが現れるのは第何項か。nを用いて表せ。

$\{a_n\}: 1 \mid 1, 2 \mid 1, 2, 3 \mid 1, 2, 3, 4 \mid 1, 2, \cdots$

1群 2群 3群 4群 と群に分ける。

初めてnが現れるのは

n群のn番目であるので

それは

$1+2+\cdots+n$

$=\frac{1}{2}n(n+1)$ 番目

である

5

(2) この数列の第500項を求めよ。

第500項が第n群に属するとすると

n−1群 | ① n群 | ① n+1群

$\sum_{k=1}^{n-1}k+1$　500　$\sum_{k=1}^{n}k+1$

$\sum_{k=1}^{n-1}k+1 \leqq 500 < \sum_{k=1}^{n}k+1$ という不等式が成り立つ

$\therefore \frac{1}{2}(n-1)n+1 \leqq 500 < \frac{1}{2}n(n+1)+1$

$(n-1)n \leqq 998 < n(n+1)$

よって

$n=32$とすると　$31\times 32=992$，$32\times 33=1056$

より，$n=32$は上式の不等式を満たす

よって第500項は32群であり，32群の初項は

第497項より 第500項は32群の4番目

よって　$a_{500} = 4$

10