数学演習（数列）Ｈ２１．２．２　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１. 数列 $\{a_n\}$: $20, 13, 6, -1, -8, \cdots$ と数列 $\{b_n\}$: $-48, 24, -12, 6, -3, \cdots$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ。

２. 初項が１３０，公差が－３である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) 第何項が初めて負となるか。

(2) S_n の最大値とそのときの n の値を求めよ。

３. 等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2+a_3=18$，$a_4+a_5=2$ である。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

４. 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4)$　　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

５. 和 $S=2\cdot1+4\cdot4+6\cdot4^2+8\cdot4^3+\cdots\cdots+2n\cdot4^{n-1}$ を求めよ。

６. 次の数列の一般項 a_n を求めよ。　$\{a_n\}$: $1, 3, 9, 19, 33, 51, \cdots\cdots\cdots$

７. 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-5n$ となる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

８. 自然数の列 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ を次のように，順に１個，３個，５個と群に分ける。

$\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}, \cdots\cdots$

(1) 第 n 群の最初の数を求めよ。

(2) 第１５群に入る自然数の和を求めよ。

1．数列$\{a_n\}$：20, 13, 6, −1, −8, … と数列$\{b_n\}$：−48, 24, −12, 6, −3, … について，以下の問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項と，初項から第n項までの和を求めよ。

$a_n = 20+(n-1)(-7)$

$= -7n+27$ 5

$S_n = \frac{1}{2}n\{2\cdot20+(n-1)(-7)\} = \frac{1}{2}n(47-7n)$ 5

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項と，初項から第n項までの和を求めよ。

$b_n = -48\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 5

$S_n = \dfrac{-48\{1-(-\frac{1}{2})^n\}}{1-(-\frac{1}{2})} = \dfrac{-48}{\frac{3}{2}}\{1-(-\frac{1}{2})^n\}$

$= -32\{1-(-\frac{1}{2})^n\}$ 5

2．初項が１３０，公差が−３である等差数列において，初項から第n項までの和をS_nとする。

(1) 第何項が初めて負となるか。

$a_n = 130+(n-1)(-3)$

$= -3n+133$

∴ $a_n<0$ より $-3n+133<0$

∴ $n > \frac{133}{3} = 44.33\cdots$

初めて負になるのは 第45項 4

(2) S_nの最大値とそのときのnの値を求めよ。

$a_n<0$となるのは第45項からなので

S_nは$n=44$の時最大となる。 4

また，$S_{44} = \frac{1}{2}\cdot44\{2\cdot130+(44-1)(-3)\}$

$= 22(260-129)$

$= 22\cdot131$

$= 2882$ 8

3．等比数列$\{a_n\}$について，$a_2+a_3=18$，$a_4+a_5=2$である。このとき，数列$\{a_n\}$の初項と公比を求めよ。

初項をa，公比をrとする

$a_2+a_3 = ar+ar^2=18 \cdots ①$

$a_4+a_5 = ar^3+ar^4 = 2 \cdots ②$

②より

$r^2(ar+ar^2)=2$

①代入して $r^2\cdot18=2$

∴ $r=\pm\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{3}$の時 ①より

$a=\frac{81}{2}$

$r=-\frac{1}{3}$の時 ①より

$a=-81$ 8

4．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4)$

$=3\sum_{k=1}^{n}k^2-7\sum_{k=1}^{n}k+4\sum_{k=1}^{n}1$

$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-7\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n$

$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)-7(n+1)+8\}$

$=\frac{1}{2}n(2n^2-4n+2)$ 8

$=n(n^2-2n+1)=n(n-1)^2$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$ 8

5．和 $S=2\cdot1+4\cdot4+6\cdot4^2+8\cdot4^3+\cdots\cdots+2n\cdot4^{n-1}$ を求めよ。

$S = 2\cdot1+4\cdot4+6\cdot4^2+\cdots+2n\cdot4^{n-1}$

$-)\ 4S = 2\cdot4+4\cdot4^2+\cdots+2(n-1)4^{n-1}+2n\cdot4^n$

$-3S = 2\cdot1+\underbrace{2\cdot4+2\cdot4^2+\cdots+2\cdot4^{n-1}}-2n4^n$

初2，比4，数n

$=\frac{2(4^n-1)}{4-1}-2n\cdot4^n$

$=\frac{2\cdot4^n-2-6n\cdot4^n}{3}$

$=\frac{(2-6n)\cdot4^n-2}{3}$

∴ $-3S=\frac{(2-6n)4^n-2}{3}$ より

$S=\frac{(6n-2)4^n+2}{9}$ 8

6．次の数列の一般項a_nを求めよ。　$\{a_n\}$：1, 3, 9, 19, 33, 51, ………

2 6 10 14 18

階差数列$\{b_n\}$は

初項2，公差4の等差数列より $b_n=2+(n-1)4=4n-2$

∴ $n\geqq2$の時

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-2)$

$=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)$

$=2n^2-4n+3$

ここでn=1を代入すると成り立つので

$a_n=2n^2-4n+3$ 8

7．初項から第n項までの和S_nが$S_n=2n^2-5n$となる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$a_1=S_1=2-5=-3$

$n\geqq2$の時

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-5n)-\{2(n-1)^2-5(n-1)\}$

$=(2n^2-5n)-(2n^2-4n+2-5n+5)$

$=4n-7\cdots(*)$

ここで(*)に$n=1$を代入するとa_1に一致するので

$a_n=4n-7$ 8

8．自然数の列1, 2, 3, …… を次のように，順に1個，3個，5個と群に分ける。

{1}, {2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8, 9}, {10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, ……

(1) 第n群の最初の数を求めよ。

第n群には2n−1個の項が入っているので，n群の最初は

$\underset{1群}{1}+\underset{2群}{3}+\underset{3群}{5}+\cdots+\underset{n-1群}{2(n-1)-1}+\underset{n群1番}{1}$

$=\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)+1 = 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)+1$

$=n^2-2n+2$ 8

(2) 第１５群に入る自然数の和を求めよ。

15群の最初の数は(1)より $15^2-2\cdot15+2=197$

また，15群の項数は $2\cdot15-1=29$個

∴15群は初項197，公差1，項数29の等差数列の和より 8

$S=\frac{1}{2}\cdot29\{2\cdot197+(29-1)\cdot1\}=\frac{1}{2}\cdot29\cdot422=6119$