数学演習（数列）Ｈ２１．１．３１　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１. 数列$\{a_n\}$：$13,7,1,-5,-11,\cdots$ と数列$\{b_n\}$：$-3,6,-12,24,-48,\cdots$ について，以下の問いに答えよ。

⑴ 数列$\{a_n\}$の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ。

⑵ 数列$\{b_n\}$の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよ。

２. 初項が１００，公差が－３である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

⑴ 第何項が初めて負となるか。

⑵ S_n の最大値とそのときの n の値を求めよ。

３. 等比数列$\{a_n\}$について，$a_2+a_3=8$，$a_4+a_5=2$ である。このとき，数列$\{a_n\}$の初項と公比を求めよ。

４. 次の和を求めよ。

⑴ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$　　　⑵ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

５. 和 $S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+4\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$ を求めよ。

６. 次の数列の一般項 a_n を求めよ。　$\{a_n\}$：$10,8,4,-2,-10,\cdots\cdots$

７. 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-n$ となる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

８. 自然数の列1, 2, 3……を次のように，順に１個，３個，５個…と群に分ける。

$\{1\},\{2,3,4\},\{5,6,7,8,9\},\{10,11,12,13,14,15,16\},\cdots\cdots$

⑴ 第 n 群の最初の数を求めよ。

⑵ 第１０群に入る自然数の和を求めよ。

1．数列$\{a_n\}$：13，7，1，−5，−11，… と数列$\{b_n\}$：−3，6，−12，24，−48，… について，以下の問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項と，初項から第n項までの和を求めよ。

$$a_n = 13+(n-1)(-6) = \underline{-6n+19}$$

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2\cdot 13+(n-1)(-6)\}$$
$$= n\{13+(n-1)(-3)\} = \underline{n(16-3n)}$$

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項と，初項から第n項までの和を求めよ。

$$b_n = \underline{-3(-2)^{n-1}}$$

$$S_n = \frac{-3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} = \frac{-3\{1-(-2)^n\}}{3} = \underline{(-2)^n-1}$$

2．初項が１００，公差が−３である等差数列において，初項から第n項までの和をS_nとする。

(1) 第何項が初めて負となるか。

一般項 $a_n = 100+(n-1)(-3) = 103-3n$

∴ $a_n<0$ より $103-3n<0$

∴ $n>\frac{103}{3}=34.3\cdots$ より 第35項

(2) S_nの最大値とそのときのnの値を求めよ。

(1)より第35項で初めて負になるので初項から第34項までの和が最大

また，
$$S_{34} = \frac{1}{2}\cdot 34\{2\cdot 100+(34-1)(-3)\}$$
$$= 17\cdot(200-99)$$
$$= 17\cdot 101 = \underline{1717}$$

3．等比数列$\{a_n\}$について，$a_2+a_3=8$，$a_4+a_5=2$ である。このとき，数列$\{a_n\}$の初項と公比を求めよ。

初項をa，公比をrとする。

$a_2+a_3 = ar+ar^2 = 8 \cdots ①$

$a_4+a_5 = ar^3+ar^4 = 2 \cdots ②$

②より $r^2(ar+ar^2)=2$ で

①を代入して

$r^2\cdot 8 = 2$ ∴ $r=\pm\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$の時 ①より $a=\frac{32}{3}$

$r=-\frac{1}{2}$の時 ①より $a=-32$

4．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$$
$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+9(n+1)+12\}$$
$$= \frac{1}{6}n(2n^2+12n+22) = \underline{\frac{1}{3}n(n^2+6n+11)}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2} = \underline{\frac{n}{2(n+2)}}$$

5．和 $S=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots\cdots+n\cdot 3^{n-1}$ を求めよ。

$$S = 1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots\cdots+n\cdot 3^{n-1}$$
$$-)\ 3S = \quad 1\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 3^{n-1}+n\cdot 3^n$$
$$-2S = \underbrace{1\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 3^2+\cdots\cdots+1\cdot 3^{n-1}}_{初1,\ 比3,\ 数n}-n\cdot 3^n$$
$$= \frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^n$$
$$= \frac{3^n-1}{2}-n\cdot 3^n$$
$$= \frac{3^n-1-2n\cdot 3^n}{2} = \frac{(1-2n)3^n-1}{2}$$

よって $-2S=\frac{(1-2n)\cdot 3^n-1}{2}$

より $S=\underline{\frac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{4}}$

6．次の数列の一般項a_nを求めよ。　$\{a_n\}$：10，8，4，−2，−10，………

$\{b_n\}$：−2 −4 −6 −8

階差数列$\{b_n\}$は初項−2，公差−2の等差数列より

$b_n = -2+(n-1)(-2) = -2n$

∴ $n\geqq 2$の時
$$a_n = 10+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)$$
$$= 10+(-2)\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$$
$$= -n^2+n+10$$

この式に$n=1$を代入すると成り立つので

$\underline{a_n=-n^2+n+10}$

7．初項から第n項までの和S_nが $S_n=2n^2-n$ となる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$a_1 = S_1 = 2-1 = 1$

$n\geqq 2$の時
$$a_n = S_n-S_{n-1}$$
$$= (2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$$
$$= (2n^2-n)-(2n^2-4n+2-n+1)$$
$$= 4n-3 \cdots ①$$

ここで①に$n=1$を代入すると成り立つ

∴ $\underline{a_n=4n-3}$

8．自然数の列1，2，3，……を次のように，順に1個，3個，5個と群に分ける。

{1}，{2，3，4}，{5，6，7，8，9}，{10，11，12，13，14，15，16}，……

← 等差数列

(1) 第n群の最初の数を求めよ。

1群に1個，2群に3個，3群に5個より

第n群には $1+(n-1)\cdot 2=2n-1$ 個の項が入っている。よって第n群の最初の数は

$$\underset{(1群)}{1}+\underset{(2群)}{3}+\underset{(3群)}{5}+\cdots\cdots+\underset{(n-1群)}{\{2(n-1)-1\}}+\underset{(n群1番目)}{1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)+1 = 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)+1$$
$$= \underline{n^2-2n+2}$$

(2) 第１０群に入る自然数の和を求めよ。

(1)より第10群の最初は

$10^2-2\cdot 10+2 = 82$

よって第10群は初項82，公差1，項数$2\cdot 10-1=19$の等差数列の和より

$$S = \frac{1}{2}\cdot 19\{2\cdot 82+(19-1)\cdot 1\} = \frac{1}{2}\cdot 19\cdot 182 = \underline{1729}$$