数学演習（数列）Ｈ２１．１．３０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．数列$\{a_n\}$：$-7,-3,1,5,9,\cdots$ および，数列$\{b_n\}$：$-2,6,-18,54,-162,\cdots$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$はどのような数列か類推せよ。また，その一般項 a_n を答えよ。

(2) 数列$\{b_n\}$はどのような数列か類推せよ。また，その一般項 b_n を答えよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

２．初項が４０，公差が－３である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) 第何項が初めて負となるか。

(2) S_n の最大値とそのときの n の値を求めよ。

３．等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2+a_3=3$，$a_4+a_5=\frac{3}{4}$ である。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

４．次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

５．和 $S_n=2\cdot3^0+4\cdot3^1+6\cdot3^2+8\cdot3^3+\cdots\cdots+(2n-2)\cdot3^{n-2}+2n\cdot3^{n-1}$ を求めよ。

６．階差数列を用いて，次の数列の一般項 a_n を求めよ。

$\{a_n\}$：$3,5,9,15,23,33,45,\cdots\cdots$

７．初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^2-3n$ となる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

８．自然数の列$1,2,3\cdots\cdots$を次のように，順に２個，４個，６個…と群に分ける。

$\{1,2\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10,11,12\},\cdots\cdots$

(1) 第 n 群の最初の数を求めよ。

(2) 第８群に入る自然数の和を求めよ。

高校２年　必修数学　統一テスト　H21/1/30　～数列～　　① 4×5　② ~各8点

(　　)組(　　)番　名前(　解答　)

1 数列 $\{a_n\}$: −7, −3, 1, 5, 9, ……および，数列 $\{b_n\}$: −2, 6, −18, 54, −162, ……について，以下の問いに答えよ。

+4 +4 +4 +4　　×(−3) ×(−3) ×(−3) ×(−3)

(1) 数列 $\{a_n\}$ はどのような数列か類推せよ。また，その一般項 a_n を答えよ。

初項 −7，公差 4 の等差数列　④

$a_n = -7 + (n-1)\cdot 4 = 4n-11$　④

(2) 数列 $\{b_n\}$ はどのような数列か類推せよ。また，その一般項 b_n を答えよ。

初項 −2，公比 −3 の等比数列　④

$b_n = -2\times(-3)^{n-1}$　④

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)より

$S_n = \frac{1}{2}n(-7+4n-11) = \frac{1}{2}n(4n-18) = n(2n-9)$　④

$(2n^2-9n)$

2 初項が 40，公差が −3 である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) 第何項が初めて負になるか。

この数列の一般項 a_n は　$a_n = 40+(n-1)(-3)$
$= -3n+43$

条件は　$-3n+43<0$
$-3n<-43$
$n>\frac{43}{3}\ (\fallingdotseq 14.3)$

これをみたす最小の自然数 n は 15

よって　第15項　⑧

(2) S_n の最大値とそのときの n の値を求めよ。

(1)より
各項の数は　第14項までが正，
第15項以降が負なので
S_n が最大となるのは　$n=14$ の時　④

この時，最大値は　$S_{14} = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot\{2\times 40 + 13\times(-3)\}$
$= 287$　⑧

3 等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2+a_3=3$，$a_4+a_5=\frac{3}{4}$ である。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

初項を a，公比を r とすると，一般項 $a_n = a\cdot r^{n-1}$

よって
$ar+ar^2=3$ …①
$a\cdot r^3+ar^4=\frac{3}{4}$ …②

②より　$(ar+ar^2)\cdot r^2=\frac{3}{4}$

①より　$3r^2=\frac{3}{4}$
$r^2=\frac{1}{4}$

$r=\pm\frac{1}{2}$

①より
$r=\frac{1}{2}$ のとき　$\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a=3$
$a=4$
$r=-\frac{1}{2}$ のとき　$-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a=3$
$a=-12$

以上より
$(a, r)=(4, \frac{1}{2}), (-12, -\frac{1}{2})$　⑧

4 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$

$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$　⑧

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots$
$\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{n}{n+1}$　⑧

5 和 $S_n=2\cdot 3^0+4\cdot 3^1+6\cdot 3^2+8\cdot 3^3+\cdots\cdots+(2n-2)\cdot 3^{n-2}+2n\cdot 3^{n-1}$ を求めよ。

$S_n = 2\cdot 3^0+4\cdot 3^1+\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$
$-)\ 3S_n = \qquad 2\cdot 3^1+\cdots+(2n-2)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n$

$-2S_n = \underline{2\cdot 3^0+2\cdot 3^1+\cdots+2\cdot 3^{n-1}}-2n\cdot 3^n$

初項 2，公比 3，項数 n の等比の和

$-2S_n=\frac{2\times(3^n-1)}{3-1}-2n\cdot 3^n$

$-2S_n=3^n-1-2n\cdot 3^n$

$S_n=\frac{1}{2}(-3^n+1+2n\cdot 3^n)$

$=\frac{1}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n+1\}$　⑧

6 階差数列を用いて，次の数列の一般項 a_n を求めよ。

$\{a_n\}$: 3, 5, 9, 15, 23, 33, 45, ……

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{b_n\}$: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ……　(初項 2，公差 2 の等差数列)

よって $\{b_n\}$ の一般項　$b_n=2n$

$n\geqq 2$ のとき，

$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k)$

$=3+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$

$=n^2-n+3$

ここで $n=1$ とすると $a_1=3$ より 成立

ゆえに　$a_n=n^2-n+3$　⑧

7 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^2-3n$ となる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=1^2-3\cdot 1=-2$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$
$=(n^2-3n)-(n^2-5n+4)$
$=2n-4$

ここで $n=1$ とすると　$a_1=-2$ より成立。

以上より　$a_n=2n-4$　⑧

8 自然数の列 1, 2, 3, ……を次のように，順に 2 個，4 個，6 個，……と第 n 群に $2n$ 個の項が入るように群に分ける。

{1, 2}, {3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}, ……

(1) 第 n 群の最初の数を求めよ。

第 $(n-1)$ 群の最後の項は初めから数えて，

$2+4+6+\cdots+2(n-1)=2\{1+2+\cdots+(n-1)\}=2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)=n^2-n$

項目になる。

よって　第 n 群の最初の項は　もとの数列の第 (n^2-n+1) 項

一般項 $a_n=n$ より　求める数は　n^2-n+1　⑧

第 $n-1$ 群　第 n 群　+1

(2) 第 8 群に入る自然数の和を求めよ。

第 8 群の最初の数は (1)より　$8^2-8+1=57$

よって求める和は，初項 57，公差 1，項数 16 の等差数列の和だから，

第 8 群　57, 58, …　16 こ

$S=\frac{1}{2}\times 16\times\{2\times 57+15\times 1\}=1032$　⑧