数学演習（数列）Ｈ１７．９．２９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．第５項が１０８，第２０項が－２３７である等差数列がある。

(1) この数列の初項と公差を求めよ。

(2) この数列の初項から第何項までの和が最大となるか。

２．第３項が１２，第６項が９６である等比数列がある。

(1) この数列の一般項を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの，各項の平方の和を求めよ。

３．等比数列をなす３つの数 $1, r, r^2$ の順序を入れ替えたら等差数列になった。このとき，r の値を求めよ。ただし，$r<0$ とする。

４．初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+2n+3$ である数列の一般項を求めよ。

５．次の数列の一般項と初項から第 n 項までの和を，n を用いてそれぞれ表せ。

(1) $1, 3, 7, 15, 31, 63, \cdots\cdots$

(2) $1, 11, 111, 1111, 11111, \cdots\cdots$

(3) $1, \dfrac{1}{1+2}, \dfrac{1}{1+2+3}, \dfrac{1}{1+2+3+4}, \cdots\cdots$

(4) $2\cdot3^2, 4\cdot4^2, 6\cdot5^2, 8\cdot6^2, 10\cdot7^2, \cdots\cdots$

(5) $1, 2\cdot3, 3\cdot3^2, 4\cdot3^3, 5\cdot3^4, \cdots\cdots$

1、第５項が108、第２０項が−237である等差数列がある。

(1) この数列の初項と公差を求めよ。

(2) この数列の初項から第何項までの和が最大となるか。

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d$ とおくと．

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + (5-1)d = 108 \\ a_{20} = a_1 + (20-1)d = -237 \end{cases}$$

$\therefore$ $a_1 = 200,\ d = -23$

(2) $a_n < 0$ となる n は．

$200 + (n-1)(-23) < 0$

$n > \frac{223}{23} = 9.\cdots$

$\therefore$

よって第10項から $\{a_n\}$ は負となるので

初項から第9項までの和が最大

2、第３項が12、第６項が96の等比数列がある。

(1) この数列の一般項を求めよ。

(2) 初項から第ｎ項までの各項の平方の和を求めよ。

(1) $a_n = a_1 r^{n-1}$ とおくと．

$$\begin{cases} a_3 = a_1 r^{3-1} = 12 \\ a_6 = a_1 r^{6-1} = 96 \end{cases}$$

$\therefore \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = \frac{96}{12}$

$r^3 = 8$　　$\therefore$ $r = 2$, $a_1 = 3$

よって　$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

(2)

$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (3 \cdot 2^{k-1})^2$

$= \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 2^{2(k-1)}$

$= \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 4^{k-1} = \frac{9(1-4^n)}{1-4}$

$\begin{cases} 初項\ 9 \\ 公比\ 4 \\ 項数\ n \end{cases}$

$= \frac{9}{-3}(1-4^n) = 3 \cdot 4^n - 3$

等比数列をなす３つの数1、ｒ、r^2の順序をいれかえたら等差数列になった。rの値をめよ。ただし、ｒ<0とする。

$r<0$ より．3つの数 $1, r, r^2$ が等差数列になるには．

$r<-1$ のとき．$r, 1, r^2$，$-1<r<0$ のとき．$r, r^2, 1$

となるべばより

$r<-1$ のとき．

公差 $= 1 - r = r^2 - 1$

$r^2 + r - 2 = 0$

$r = -2, 1$　$r<-1$ より $r = -2$

$-1<r<0$ のとき．

公差 $= r^2 - r = 1 - r^2$

$2r^2 - r - 1 = 0$

$r = 1, -\frac{1}{2}$

$-1<r<0$ より $r = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ $r = -2, -\frac{1}{2}$

4、初項から第ｎ項までの和が$S_n = n^2 + 2n + 3$である数列a_nの一般項を求めよ。

$n \geqq 2$ の時．

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 2n + 3) - \{(n-1)^2 + 2(n-1) + 3\}$

$= n^2 + 2n + 3 - (n^2 - 2n + 1 + 2n - 2 + 3)$

$= 2n + 1$　$\cdots(*)$

また　$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 + 3 = 6$

これは $(*)$ に $n=1$ を代入した値と一致しない

よって

$a_n = \begin{cases} 2n+1 & (n \geqq 2) \\ 6 & (n=1) \end{cases}$

5、次の数列の一般項、初項から第ｎ項までの和をｎを使ってあらわせ。

(1) 1，3，7，15，31，63⋯

階差 2　4　8　16　32

$\begin{cases} 初項\ 2 \\ 公比\ 2 \end{cases}$

階差数列は $b_n = 2^n$

よって $n \geqq 2$ の時．

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$\begin{cases} 初項\ 2 \\ 公比\ 2 \\ 項数\ n-1 \end{cases}$

$= 1 + \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}$

$= 2^n - 1$

$n=1$ を代入すると $a_1 = 1$ となるので　$a_n = 2^n - 1$

また

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1)$

$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n$

$= 2^{n+1} - n - 2$

(2) 1、11、111、1111⋯

階差 10　100　1000

$\begin{cases} 初項\ 10 \\ 公比\ 10 \end{cases}$

階差数列は $b_n = 10 \cdot 10^{n-1}$

$\begin{cases} 初項\ 10 \\ 公比\ 10 \\ 項数\ n-1 \end{cases}$

よって $n \geqq 2$ のとき．

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 10 \cdot 10^{k-1}$

$= 1 + \frac{10(1-10^{n-1})}{1-10}$

$= 1 + \frac{10}{-9}(1 - 10^{n-1})$

$= \frac{10^n - 10 + 9}{9} = \frac{10^n - 1}{9}$　($n=1$ のときも成り立つ)

また．和は

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9}(10^k - 1)$

$\begin{cases} 初項\ 10 \\ 公比\ 10 \\ 項数\ n \end{cases}$

$= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 10^k - \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 1$

$= \frac{1}{9} \cdot \frac{10(1-10^n)}{1-10} - \frac{1}{9}n$

$= \frac{1}{9} \cdot \frac{10 - 10^{n+1}}{-9} - \frac{1}{9}n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$

(3) 1、$\frac{1}{1+2}$、$\frac{1}{1+2+3}$、$\frac{1}{1+2+3+4}$、⋯

一般項は　$\frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$

また．$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ と分解できるので．

和は．

$S = \frac{2}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} = \left(\frac{2}{1} - \cancel{\frac{2}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{2}} - \cancel{\frac{2}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{2}{n}} - \frac{2}{n+1}\right)$

$= 2 - \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$

(4) 2·3²、4·4²、6·5²、8·6²、10·7²、⋯

一般項は　$2n(n+2)^2$

和は

$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2k(k+2)^2$

$= \sum_{k=1}^{n} 2k(k^2 + 4k + 4)$

$= 2\sum_{k=1}^{n} k^3 + 8\sum_{k=1}^{n} k^2 + 8\sum_{k=1}^{n} k$

$= 2 \times \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + 8 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 8 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\{3n(n+1) + 8(2n+1) + 24\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(3n^2 + 3n + 16n + 8 + 24)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(3n^2 + 19n + 32)$

(5) 1、2·3、3·3²、4·3³、5·3⁴、⋯

一般項は　$n \times 3^{n-1}$

$n \times 3^{n-1} - (n-1) \times 3^{n-1}$

$= 3^{n-1}\{n - (n-1)\}$

$S = 1 + 2 \times 3 + 3 \times 3^2 + \cdots\cdots + n \times 3^{n-1}$

$3S = \qquad 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + \cdots\cdots + (n-1) \times 3^{n-1} + n \times 3^n$　$(-$

$-2S = 1 + (3 + 3^2 + \cdots\cdots + 3^{n-1}) - n \times 3^n$

(　)の中は．初項3．公比3．項数n−1の等比数列の和

$\therefore$

$(\ ) = \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} = \frac{3}{-2}(1 - 3^{n-1}) = \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2}$

よって上式に代入して

$-2S = 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2}\right) - n \times 3^n$

$= -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - n\right) \times 3^n = \frac{-1 + (1-2n)3^n}{2}$

$\therefore$ $S = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}$