確認テスト（数列）Ｈ２２．７．５　　(　)組(　)番　名前(　)

1．第 16 項が -50，第 21 項が -80 である等差数列がある。

(1)　この等差数列の初項と公差を求めよ。

(2)　4 はこの数列の第何項か。

2．数列 a，3，a^2 が等差数列であるとき，a の値を求めよ。

3．次の等差数列の和を求めよ。　123，120，117，……，-24

4．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

5．第 2 項が 14，第 5 項が 112 である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

6．次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。　$1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\cdots$

7．次の和を求めよ。　$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

8．次の和を求めよ。　$\sum_{k=1}^{n}(-4)^k$

9．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

$1,\ 1+3,\ 1+3+9,\ 1+3+9+27,\ \cdots\cdots$

10. 次の和を求めよ。　$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}$

11. 次の数列の一般項 a_n を求めよ。　$10,\ 8,\ 4,\ -2,\ -10,\ \cdots\cdots$

12. 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^3$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

確認テスト（数列）Ｈ２２．７．５　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．第 16 項が -50，第 21 項が -80 である等差数列がある。

(1)　この等差数列の初項と公差を求めよ。

(2)　4 はこの数列の第何項か。

解答　(1)　初項 40，公差 -6　　(2)　第 7 項

解説

(1)　この数列の初項を a，公差を d，第 n 項を a_n とすると　　$a_n=a+(n-1)d$

$a_{16}=-50$，$a_{21}=-80$ であるから　　$-50=a+15d$，$-80=a+20d$

これを解いて　　$a=40$，$d=-6$

よって　　初項 40，公差 -6

(2)　$a_n=40+(n-1)(-6)=-6n+46$

$a_n=4$ とすると　　$4=-6n+46$

ゆえに　　$n=7$

よって，4 はこの数列の第 7 項である。

2．数列 a，3，a^2 が等差数列であるとき，a の値を求めよ。

解答　$a=2$，-3

解説

数列 a，3，a^2 が等差数列であるから　　$2\cdot 3=a+a^2$

整理すると　　$a^2+a-6=0$

左辺を因数分解すると　　$(a-2)(a+3)=0$

したがって　　$a=2$，-3

3．次の等差数列の和を求めよ。　　123，120，117，……，-24

解答　2475

解説

初項は 123，公差は -3 であるから，項数を n とすると

$123+(n-1)\cdot(-3)=-24$　　よって　　$n=50$

したがって，求める和は　　$\frac{1}{2}\cdot 50\{123+(-24)\}=2475$

4．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

解答　(1)　第 19 項　　(2)　第 18 項，和 648

解説

一般項を a_n とすると　　$a_n=70+(n-1)\times(-4)=74-4n$

(1)　$a_n<0$ とすると　　$74-4n<0$　　よって　　$n>\frac{37}{2}=18.5$　…… ①

① を満たす最小の自然数 n は　　$n=19$

したがって，第 19 項が初めて負になる。

(2)　(1) の結果から　　$a_1>0$，$a_2>0$，……，$a_{18}>0$，$a_{19}<0$，$a_{20}<0$，……

よって，初項から第 18 項までの和が最大となる。

また，そのときの和は　　$\frac{1}{2}\cdot 18\{2\cdot 70+(18-1)\cdot(-4)\}=648$

5．第 2 項が 14，第 5 項が 112 である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答　$7\cdot 2^{n-1}$

解説

初項を a，公比を r とする。

第 2 項，第 5 項について　　$ar=14$，$ar^4=112$

$ar^4=(ar)r^3$ であるから　　$14r^3=112$　　よって　　$r^3=8$

r は実数であるから　　$r=2$　　$ar=14$ から　　$a=7$

よって，一般項は　　$7\cdot 2^{n-1}$

6．次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。　1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，……

解答　$S_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

解説

初項は 1，公比は $-\frac{1}{2}\div 1=-\frac{1}{2}$ であるから

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

7．次の和を求めよ。　　$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

解答　$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

解説

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\frac{1}{2}n(n+1)+5n=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$$

8．次の和を求めよ。　　$\sum_{k=1}^{n}(-4)^k$

解答　$-\frac{(-4)^{n+1}+4}{5}$

解説

$$\sum_{k=1}^{n}(-4)^k=\frac{-4\times\{1-(-4)^n\}}{1-(-4)}=\frac{-4-(-4)^{n+1}}{5}=-\frac{(-4)^{n+1}+4}{5}$$

9．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

1，1＋3，1＋3＋9，1＋3＋9＋27，……

解答　順に　$\frac{1}{2}(3^k-1)$，$\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

解説

数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$a_k=1+3+9+\cdots\cdots+3^{k-1}=\frac{3^k-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

10．次の和を求めよ。　　$\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}$

解答　$\frac{n}{4(n+1)}$

解説

これは，第 k 項が $\frac{1}{2k(2k+2)}$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

ここで，$\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ であるから，求める和は

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$$

11．次の数列の一般項 a_n を求めよ。　　10，8，4，-2，-10，……

解答　$a_n=-n^2+n+10$

解説

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

-2，-4，-6，-8，……

よって　　$b_n=-2n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=10+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=10-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=-n^2+n+10$$

初項は $a_1=10$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=-n^2+n+10$

12. 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^3$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=3n^2-3n+1$

解説

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=n^3-(n-1)^3$

$=3n^2-3n+1$

初項は　$a_1=S_1=1^3=1$

よって，$a_n=3n^2-3n+1$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-3n+1$