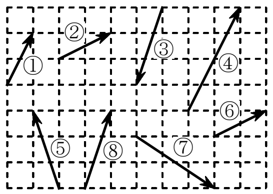
統一テスト（ベクトル）追試H３０．２．１３　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 右の図に示されたベクトルについて，向きの等しいベクトルの番号の組をすべてあげよ。



$\boxed{2}$ $|\vec{a}|=\frac{1}{2}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

$\boxed{3}$ $\vec{a}=(1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,\ -4)$ のとき，$2\vec{a}+3\vec{b}$ を成分表示せよ。

$\boxed{4}$ 次の２つのベクトルが平行になるように，x の値を定めよ。$\vec{a}=(2,\ x)$，$\vec{b}=(3,\ 6)$

$\boxed{5}$ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\theta=120^\circ$

$\boxed{6}$ 次の２つのベクトルが垂直になるように，x の値を定めよ。$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(x,\ x+2)$

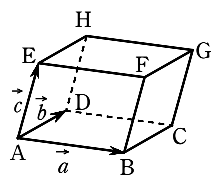
$\boxed{7}$ 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $2:3$ に内分する点，外分する点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{8}$ 点 A (1，4) を通り，$\vec{d}=(2,\ 3)$ に平行な直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

$\boxed{9}$ A(2，0，−3) と B (0，3，−1)を結ぶ線分の長さを求めよ。

$\boxed{10}$ 平行六面体 ABCD−EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GB}}$



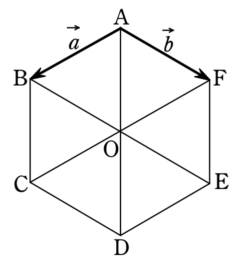
$\boxed{11}$ 2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -3,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 1,\ 2)$ のなす角 θ を求めよ。

$\boxed{12}$ 3 点 A (2，−1，4)，B (1，3，0)，C (3，1，2) を頂点とする △ABC の重心 G の座標を求めよ。

$\boxed{13}$ 点 C (−1，2，−3) を中心とする半径 4 の球面の方程式を求めよ。

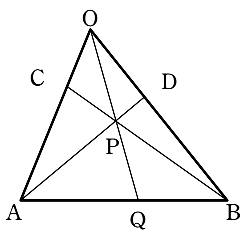
$\boxed{14}$ 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{FD}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$



15 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき，$|2\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。

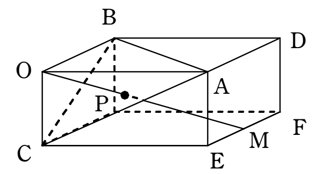
16 $\triangle$OABにおいて，辺OAを$1:2$に内分する点をC,
辺OBを$2:3$に内分する点をDとし，
線分ADと線分BCの交点をPとし，
直線OPと線分ABの交点をQとする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ。
(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。
(2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



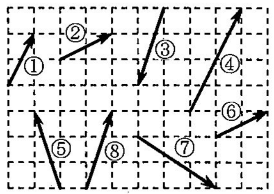
17 $\triangle$OABにおいて，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$s+t=3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

18 OA$=4$，OB$=3$，$\angle$AOB$=60^\circ$ である$\triangle$OABがあり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。頂点Oから線分ABに下ろした垂線の足をHとするとき，$\overrightarrow{OH}$ を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

19 図のような直方体OADB−CEFGにおいて，
線分EFの中点をMとする。
直線OMと平面ABCの交点をPとする。
OP : OM を求めよ。



1 右の図に示されたベクトルについて，向きの等しいベクトルの番号の組をすべてあげよ。



① と ④

② と ⑥

④

2 $|\vec{a}|=\frac{1}{2}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

長さを1にすればいいので

2倍すればいい

$2\vec{a}$，$-2\vec{a}$　④

3 $\vec{a}=(1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,\ -4)$ のとき，$2\vec{a}+3\vec{b}$ を成分表示せよ。

$2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,5)+3(3,-4)$

$=(2,10)+(9,-12)$

$=(2+9,\ 10-12)=(11,-2)$　④

4 次の２つのベクトルが平行になるように，x の値を定めよ。$\vec{a}=(2,\ x)$，$\vec{b}=(3,\ 6)$

$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k が存在する

$(2,x)=k(3,6)$

$(2,x)=(3k,6k)$

$\begin{cases} 2=3k \\ x=6k \end{cases}$

よって $k=\frac{2}{3}$

$x=6\times\frac{2}{3}=4$　④

5 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\theta=120°$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120°$

$=3\times4\times(-\frac{1}{2})=-6$　④

6 次の２つのベクトルが垂直になるように，x の値を定めよ。$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(x,\ x+2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x\cdot x+(-1)(x+2)$

$=x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$　④

7 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を2：3に内分する点，外分する点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

内分　A$(\vec{a})$　B$(\vec{b})$　②　③

$\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

外分　A$(\vec{a})$　B$(\vec{b})$　(-2)　③

$\frac{3\vec{a}-2\vec{b}}{-2+3}$

$=3\vec{a}-2\vec{b}$

⑧（各3）

8 点 A (1, 4) を通り，$\vec{d}=(2,\ 3)$ に平行な直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

$\vec{OP}=\vec{OA}+t\vec{d}$

$(x,y)=(1,4)+t(2,3)$

$=(1,4)+(2t,3t)$

$=(1+2t,\ 4+3t)$

よって

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=4+3t \end{cases}$

また

$3(x-1)=6t$

$-)\ 2(y-4)=6t$

$3(x-1)-2(y-4)=0$

$3x-3-2y+8=0$

$3x-2y+5=0$

⑥（各3）

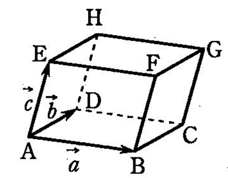
9 A(2, 0, −3) と B(0, 3, −1) を結ぶ線分の長さを求めよ。

$AB=\sqrt{(0-2)^2+(3-0)^2+(-1+3)^2}$

$=\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$　④

10 平行六面体 ABCD-EFGH において，$\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{AD}=\vec{b}$，$\vec{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\vec{EC}$　　(2) $\vec{GB}$



(1) $\vec{EC}=\vec{EF}+\vec{FG}+\vec{GC}$

$=\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　④

(2) $\vec{GB}=\vec{GF}+\vec{FB}$

$=(-\vec{b})+(-\vec{c})=-\vec{b}-\vec{c}$　④

11 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -3,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 1,\ 2)$ のなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+(-3)\times1+1\times2$

$=-6-3+2=-7$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$

よって $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-7}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=-\frac{7}{14}=-\frac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より $\theta=120°$　④

12 3点 A (2, −1, 4)，B (1, 3, 0)，C (3, 1, 2) を頂点とする △ABC の重心 G の座標を求めよ。

$G\left(\frac{2+1+3}{3},\ \frac{-1+3+1}{3},\ \frac{4+0+2}{3}\right)$

より $G(2,1,2)$　④

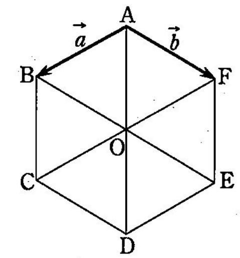
13 点 C (−1, 2, −3) を中心とする半径4の球面の方程式を求めよ。

$\{x-(-1)\}^2+(y-2)^2+\{z-(-3)\}^2=4^2$

より $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$　④

14 正六角形 ABCDEF において，$\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\vec{FD}$　　(2) $\vec{DA}$



(1) $\vec{FD}=\vec{FC}+\vec{CD}$

$=2\vec{a}+\vec{b}$　④

(2) $\vec{DA}=\vec{DC}+\vec{CF}+\vec{FA}$

$=(-\vec{b})+(-2\vec{a})+(-\vec{b})=-2\vec{a}-2\vec{b}$　④

(58)

15 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき，$|2\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 4\times3^2 - 4\times5 + 4^2$

$= 36-20+16$

$= 32$

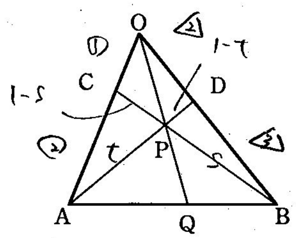
$|2\vec{a}-\vec{b}| \geqq 0$ より $|2\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

5

16 △OABにおいて，辺OAを1：2に内分する点をC，辺OBを2：3に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとし，直線OPと線分ABの交点をQとする。$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\vec{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(1)

AP：PD $= t:(1-t)$ とおくと

$\vec{OP} = \dfrac{(1-t)\vec{OA}+t\vec{OD}}{t+(1-t)} = (1-t)\vec{a} + t\times\dfrac{2}{5}\vec{b}$

$= (1-t)\vec{a} + \dfrac{2}{5}t\vec{b}$ …①

BP：PC $= s:(1-s)$ とおくと

$\vec{OP} = \dfrac{s\vec{OC}+(1-s)\vec{OB}}{(1-s)+s} = s\times\dfrac{1}{3}\vec{a} + (1-s)\vec{b}$

$= \dfrac{1}{3}s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$ …②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ より ①，②から

$\begin{cases} 1-t = \dfrac{1}{3}s \\ \dfrac{2}{5}t = 1-s \end{cases}$ 解いて $s=\dfrac{9}{13}$，$t=\dfrac{10}{13}$

ゆえに $\vec{OP} = \dfrac{3}{13}\vec{a} + \dfrac{4}{13}\vec{b}$

5

(2)

$\vec{OQ} = k\vec{OP}$ となる実数 k が存在する。

$\vec{OQ} = k\left(\dfrac{3}{13}\vec{a} + \dfrac{4}{13}\vec{b}\right) = \dfrac{3}{13}k\vec{OA} + \dfrac{4}{13}k\vec{OB}$

5

Qは直線AB上より $\dfrac{3}{13}k + \dfrac{4}{13}k = 1$.

$k=\dfrac{13}{7}$ より $\vec{OQ} = \dfrac{3}{7}\vec{a} + \dfrac{4}{7}\vec{b}$

17 △OABにおいて，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$，$s+t=3$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

$s+t=3$ より $\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{3}=1$

$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$

$= \dfrac{s}{3}\times3\vec{OA} + \dfrac{t}{3}\times3\vec{OB}$

よって $s'=\dfrac{s}{3}$，$t'=\dfrac{t}{3}$ とすると

$s'+t'=1$，また $s\geqq0$ より $s'\geqq0$，$t\geqq0$ より $t'\geqq0$

そして $3\vec{OA}=\vec{OA'}$，$3\vec{OB}=\vec{OB'}$ とすると

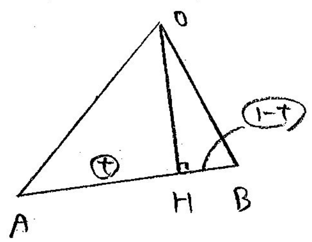
$\vec{OP} = s'\vec{OA'} + t'\vec{OB'}$ $(s'+t'=1,\ s'\geqq0,\ t'\geqq0)$

が成り立つ。以上より 点Pは線分A'B'上

5

18 OA=4，OB=3，∠AOB=60°である△OABがあり，$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$ とする。頂点Oから線分ABに下ろした垂線の足をHとするとき，$\vec{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

AH：HB $= t:(1-t)$ とおく。



$\vec{OH} = \dfrac{(1-t)\vec{OA}+t\vec{OB}}{t+(1-t)}$

$= (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$

また OH⊥AB より

$\vec{OH}\cdot\vec{AB} = \{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$= (1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} - (1-t)|\vec{a}|^2 + t|\vec{b}|^2 - t\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

ここで

$|\vec{a}| = OA = 4$，$|\vec{b}| = OB = 3$，

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ = 4\times3\times\dfrac{1}{2} = 6$

代入して

$(1-t)\times6 - (1-t)\times4^2 + t\times3^2 - t\times6 = 0$

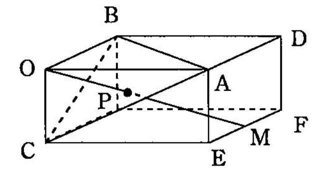
$6-6t-16+16t+9t-6t=0$

$13t-10=0$　　$t=\dfrac{10}{13}$

よって $\vec{OH} = \left(1-\dfrac{10}{13}\right)\vec{a} + \dfrac{10}{13}\vec{b} = \dfrac{3}{13}\vec{a} + \dfrac{10}{13}\vec{b}$

6

19 図のような直方体OADB−CEFGにおいて，線分EFの中点をMとする。直線OMと平面ABCの交点をPとする。OP：OMを求めよ。



$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$，$\vec{OC}=\vec{c}$ とおく。

$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AE} + \vec{EM}$

$= \vec{a} + \vec{c} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$

3点O，P，Mは一直線上より

$\vec{OP} = k\vec{OM}$ となる実数 k が存在する。

ゆえに

$\vec{OP} = k\left(\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right) = k\vec{a} + \dfrac{1}{2}k\vec{b} + k\vec{c}$ …①

また点Pは平面ABC上の点より

$\vec{AP} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$ となる実数 s,t が存在する。

よって $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$

$= \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$

$= \vec{a} + s(\vec{b}-\vec{a}) + t(\vec{c}-\vec{a})$

$= (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ …②

①②より，4点O，A，B，Cは同一平面上にないので

$\begin{cases} k = 1-s-t \\ \dfrac{1}{2}k = s \\ k = t \end{cases}$ 解いて $k=\dfrac{2}{5}$，$t=\dfrac{2}{5}$，$s=\dfrac{1}{5}$

ゆえに $\vec{OP} = \dfrac{2}{5}\vec{OM}$ が成り立つので OP：OM = 2：5

6

(①において $\vec{OP} = k\vec{OA} + \dfrac{1}{2}k\vec{OB} + k\vec{OC}$ より

Pは平面ABC上の点なので

$k + \dfrac{1}{2}k + k = 1$　よって $\dfrac{5}{2}k=1$，$k=\dfrac{2}{5}$

以下同じ.)

/32