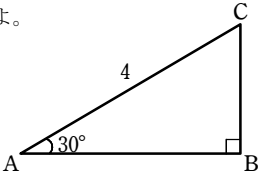


1 $|\vec{a}|=4$ のとき， \vec{a} と平行で大きさが 8 のベクトルを \vec{a} を用いて表せ。

2 $\vec{a}=(4, 2)$ ， $\vec{b}=(-3, 5)$ とする。ベクトル $\vec{q}=(-4, 6)$ を，適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

3 右の図の直角三角形 ABC において，内積 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$ を求めよ。

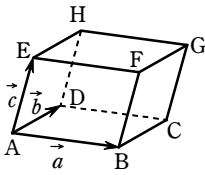


4 次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めよ。 $\vec{a}=(2, 1)$ ， $\vec{b}=(2, 6)$

5 2 点 A (\vec{a})， B (\vec{b}) を結ぶ線分 AB を 4 : 3 に内分する点， 外分する点の位置ベクトルを \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。

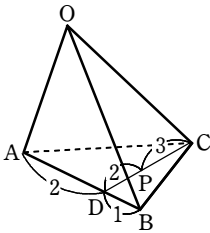
6 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}-2\vec{b}$ ， $\overrightarrow{OB}=3\vec{a}-5\vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC}=-5\vec{a}+7\vec{b}$ とする。
(1) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。
(2) 3 点 A, B, C は一直線上にあることを証明せよ。

7 平行六面体 ABCD-EFGH において， $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ， $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを，それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
(1) \overrightarrow{HC} (2) \overrightarrow{GA} (3) \overrightarrow{FH}



8 次のベクトル \vec{a}, \vec{b} が垂直になるように， x の値を定めよ。
 $\vec{a}=(1, 2, x)$ ， $\vec{b}=(-x^2, 2, 3)$

9 四面体 OABC において， 辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D， 線分 CD を 3 : 2 に内分する点を P とする。 \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OA} ， \overrightarrow{OB} ， \overrightarrow{OC} を用いて表せ。



10 yz 平面に関して点 P(3, 4, 5) と対称な点の座標を求めよ。

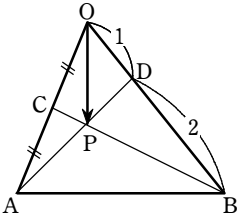
11 点 C(3, -1, 0) を中心とし， 点 A(1, 1, 2) を通る球面の方程式を求めよ。

1 $\vec{a}=(9, 3), \vec{b}=(-1, -2)$ と実数 t に対して、 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。 $|\vec{c}|$ の最小値と、そのときの t の値を求めよ。

2 $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=1, \vec{a}$ と \vec{b} のなす角が 150° のとき、 $|3\vec{a}+2\vec{b}|$ の値を求めよ。

3 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2, \vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ とする。 $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直であるように、実数 t の値を定めよ。

4 $\triangle OAB$ において、辺 OA の中点を C 、辺 OB を $1:2$ に内分する点を D とし、線分 AD と線分 BC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。



6 3 点 $A(3, 1, 2), B(4, 2, 3), C(5, 2, 5)$ の定める平面 ABC 上に点 $D(-2, -1, z)$ があるとき、 z の値を求めよ。

7 $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, -1)$ とする。平面 ABC に、原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

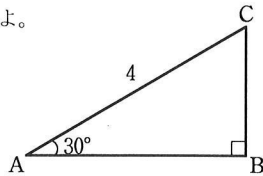
5 $OA=7, OB=3, AB=6$ である $\triangle OAB$ の内心を I とし、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。
(1) $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を D とするとき、 \overrightarrow{OD} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。
(2) \overrightarrow{OI} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。

1 $|\vec{a}|=4$ のとき、 \vec{a} と平行で大きさが8のベクトルを \vec{a} を用いて表せ。

解答 $2\vec{a}$ と $-2\vec{a}$ (3)
 $|\vec{a}|=4$ より、大きさを8にするためには2倍すればいい。逆向きも考えて $2\vec{a}$ と $-2\vec{a}$
2 $\vec{a}=(4, 2)$, $\vec{b}=(-3, 5)$ とする。ベクトル $\vec{q}=(-4, 6)$ を、適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

解答 $\vec{q}=-\frac{1}{13}\vec{a}+\frac{16}{13}\vec{b}$ (4)
 $s\vec{a}+t\vec{b}=s(4, 2)+t(-3, 5)=(4s-3t, 2s+5t)$
 $\vec{q}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると
 $(-4, 6)=(4s-3t, 2s+5t)$
よって $4s-3t=-4, 2s+5t=6$
これを解くと $s=-\frac{1}{13}, t=\frac{16}{13}$
したがって $\vec{q}=-\frac{1}{13}\vec{a}+\frac{16}{13}\vec{b}$

3 右の図の直角三角形 ABC において、内積 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ を求めよ。



解答 -4 (3)
 $AB=2\sqrt{3}, BC=2$
 \overrightarrow{BC} と \overrightarrow{CA} のなす角は $180^\circ-60^\circ=120^\circ$ であるから
 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{CA}| \cos 120^\circ = 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

4 次の2つのベクトルのなす角 θ を求めよ。 $\vec{a}=(2, 1), \vec{b}=(2, 6)$

解答 $\theta=45^\circ$ (3)
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 2 + 1 \times 6 = 10$
 $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
 $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$
よって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{10}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 45^\circ$

315° (1)

5 2点 A (\vec{a}), B (\vec{b}) を結ぶ線分 AB を 4:3 に内分する点、外分する点の位置ベクトルを \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。

解答 内分する点、外分する点の順に $\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}, -\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$ (3) (3)
2点 A (\vec{a}), B (\vec{b}) に対して、線分 AB を 4:3 に内分する点、外分する点の位置ベクトルは、それぞれ
 $\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{4+3} = \frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$
 $\frac{-3\vec{a}+4\vec{b}}{4-3} = -\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$

6 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}-2\vec{b}, \overrightarrow{OB}=3\vec{a}-5\vec{b}, \overrightarrow{OC}=-5\vec{a}+7\vec{b}$ とする。

- (1) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。
(2) 3点 A, B, C は一直線上にあることを証明せよ。

解答 (1) $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-3\vec{b}, \overrightarrow{AC}=-6\vec{a}+9\vec{b}$ (2) 略 (3)
(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}-5\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}-3\vec{b}$
 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-5\vec{a}+7\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=-6\vec{a}+9\vec{b}$
(2) $\overrightarrow{AC}=-3(2\vec{a}-3\vec{b})=-3\overrightarrow{AB}$
よって、3点 A, B, C は一直線上にある。

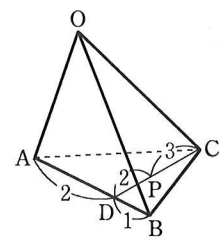
7 平行六面体 ABCD-EFGH において、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}, \overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを、それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

- (1) \overrightarrow{HC} (2) \overrightarrow{GA} (3) \overrightarrow{FH}
解答 (1) $\vec{a}-\vec{c}$ (2) $-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ (3) $-\vec{a}+\vec{b}$
(1) $\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC}=\vec{a}+(-\vec{c})=\vec{a}-\vec{c}$
(2) $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EA}=-\vec{a}+(-\vec{b})+(-\vec{c})=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$
(3) $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH}=-\vec{a}+\vec{b}$

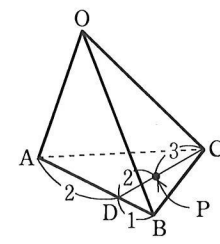
8 次のベクトル \vec{a}, \vec{b} が垂直になるように、 x の値を定めよ。

$\vec{a}=(1, 2, x), \vec{b}=(-x^2, 2, 3)$
解答 $x=-1, 4$ (4)
 \vec{a} と \vec{b} が垂直になるのは、 $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$ のときである。
 $\vec{a} \cdot \vec{b}=1 \times (-x^2) + 2 \times 2 + x \times 3$
 $=-x^2+3x+4=-(x+1)(x-4)$
よって、 $-(x+1)(x-4)=0$ より
 $x=-1, 4$

9 四面体 OABC において、辺 AB を 2:1 に内分する点を D、線分 CD を 3:2 に内分する点を P とする。 \overrightarrow{OP} を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

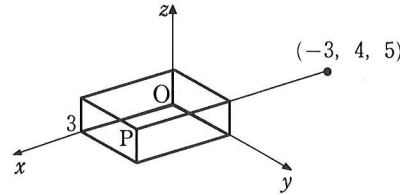


解答 $\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$ (4)
 $\overrightarrow{OD}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}$
 $\overrightarrow{OP}=\frac{2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OD}}{3+2}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OD}$
 $=\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{5}\left(\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}\right)$
 $=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$



10 yz 平面に関して点 P(3, 4, 5) と対称な点の座標を求めよ。

解答 (-3, 4, 5) (3)



11 点 C(3, -1, 0) を中心とし、点 A(1, 1, 2) を通る球面の方程式を求めよ。

解答 $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=12$ (4)
球面の半径は2点 A, C 間の距離であるから
 $\sqrt{(3-1)^2+(-1-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{3}$
点 C が球面の中心であるから、求める球面の方程式は
 $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=(2\sqrt{3})^2$
すなわち $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=12$
別解 球面の半径を r とすると、求める球面の方程式は
 $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=r^2$
この球面が点 A(1, 1, 2) を通るから
 $(1-3)^2+(1+1)^2+2^2=r^2$
すなわち $r^2=12$
よって、求める球面の方程式は
 $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=12$

- 1 $\vec{a}=(9, 3)$, $\vec{b}=(-1, -2)$ と実数 t に対して、 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。 $|\vec{c}|$ の最小値と、そのときの t の値を求めよ。

解答 $t=3$ で最小値 $3\sqrt{5}$ (6)

$$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(9, 3)+t(-1, -2)=(9-t, 3-2t)$$

$$|\vec{c}|^2=(9-t)^2+(3-2t)^2=5t^2-30t+90$$

$$=5(t-3)^2+45$$

よって、 $|\vec{c}|^2$ は $t=3$ で最小値 45 をとる。
 $|\vec{c}|\geq 0$ であるから、 $|\vec{c}|^2$ が最小のとき $|\vec{c}|$ も最小となり、最小値は $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

- 2 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, \vec{a} と \vec{b} のなす角が 150° のとき、 $|3\vec{a}+2\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答 $\sqrt{13}$ (5)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 150^\circ=\sqrt{3}\times 1\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

よって $|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$$=9\times(\sqrt{3})^2+12\times\left(-\frac{3}{2}\right)+4\times 1^2=13$$

$|3\vec{a}+2\vec{b}|\geq 0$ であるから $|3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{13}$

- 3 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ とする。 $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直であるように、実数 t の値を定めよ。

解答 $t=-1$ (6)

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直であるとき $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+t\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2$$

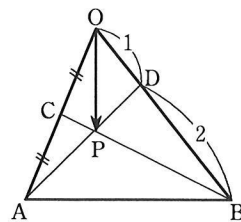
$$=2^2+t\times(-3)+(-3)+t\times 2^2$$

$$=t+1$$

$t+1=0$ より $t=-1$

- 4 $\triangle OAB$ において、辺 OA の中点を C 、辺 OB を $1:2$ に内分する点を D とし、線分 AD と線分 BC の交点を P とする。 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ とするとき、 \vec{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

解答 $\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$ (6)



4.2にゼメネウツ
 を用いてもいいかい
 SとTの議論が
 できるといい

- AP:PD=s:(1-s) とすると

$$\vec{OP}=(1-s)\vec{OA}+s\vec{OD}$$

$$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b} \quad \text{..... ①}$$

- BP:PC=t:(1-t) とすると

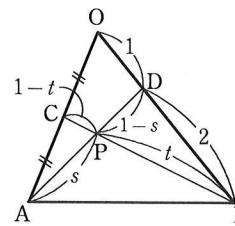
$$\vec{OP}=t\vec{OC}+(1-t)\vec{OB}$$

$$=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b} \quad \text{..... ②}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ で、 \vec{a} と \vec{b} は平行でないから、①, ② より $1-s=\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{3}s=1-t$

これを解くと $s=\frac{3}{5}$, $t=\frac{4}{5}$

よって $\vec{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$



- 5 OA=7, OB=3, AB=6 である $\triangle OAB$ の内心を I とし、 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ とする。

- (1) $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を D とするとき、 \vec{OD} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

- (2) \vec{OI} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

解答 (1) $\frac{3}{10}\vec{a}+\frac{7}{10}\vec{b}$ (2) $\frac{3}{16}\vec{a}+\frac{7}{16}\vec{b}$ (6)

- (1) OD は $\angle AOB$ の二等分線であるから

$$AD:DB=OA:OB=7:3$$

よって $\vec{OD}=\frac{3\vec{a}+7\vec{b}}{7+3}=\frac{3}{10}\vec{a}+\frac{7}{10}\vec{b}$

(2) $AD=6\times\frac{7}{10}=\frac{21}{5}$

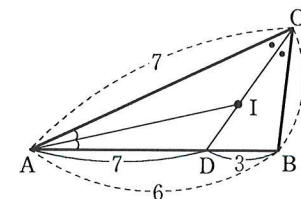
- AI は $\angle OAD$ の二等分線であるから

$$OI:ID=AO:AD=7:\frac{21}{5}=5:3$$

- よって、 I は線分 OD を $5:3$ に内分する点である。

- したがって

$$\vec{OI}=\frac{5}{8}\vec{OD}=\frac{5}{8}\times\left(\frac{3}{10}\vec{a}+\frac{7}{10}\vec{b}\right)=\frac{3}{16}\vec{a}+\frac{7}{16}\vec{b}$$



- 6 3点 A(3, 1, 2), B(4, 2, 3), C(5, 2, 5) の定める平面 ABC 上に点 D(-2, -1, z) があるとき、z の値を求めよ。

解答 $z=-6$ (6)

- 点 D が平面 ABC 上にあるから、 $\vec{AD}=s\vec{AB}+t\vec{AC}$ (s, t は実数) とおく。

$$\vec{AB}=(1, 1, 1), \vec{AC}=(2, 1, 3), \vec{AD}=(-5, -2, z-2) \text{ であるから}$$

$$(-5, -2, z-2)=s(1, 1, 1)+t(2, 1, 3)$$

$$=(s+2t, s+t, s+3t)$$

よって $s+2t=-5$ ①

$$s+t=-2$$
 ②

$$s+3t=z-2$$
 ③

- ①, ② を解くと $s=1, t=-3$

これを ③ に代入して $z=-6$

- 7 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, -1) とする。平面 ABC に、原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

解答 $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$, $OH=\frac{2}{3}$ (5)

- 点 H は平面 ABC 上にあるから、 $\vec{AH}=s\vec{AB}+t\vec{AC}$ (s, t は実数) とおく

$$\vec{OH}=(1-s-t)\vec{OA}+s\vec{OB}+t\vec{OC}$$

よって $\vec{OH}=(1-s-t, 2s, -t)$

また $\vec{AB}=(-1, 2, 0)$, $\vec{AC}=(-1, 0, -1)$

- OH は平面 ABC に垂直であるから、 \vec{OH} は \vec{AB} と \vec{AC} の両方に垂直である。

$$\vec{OH}\cdot\vec{AB}=0 \text{ から } (1-s-t)\times(-1)+2s\times 2+(-t)\times 0=0$$

式を整理して $5s+t-1=0$ ①

$$\vec{OH}\cdot\vec{AC}=0 \text{ から } (1-s-t)\times(-1)+2s\times 0+(-t)\times(-1)=0$$

式を整理して $s+2t-1=0$ ②

①, ② を解くと $s=\frac{1}{9}, t=\frac{4}{9}$

したがって $\vec{OH}=\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$

$$|\vec{OH}|=\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

以上から、点 H の座標は $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$

また、線分 OH の長さは $OH=\frac{2}{3}$

- 別解 点 H が平面 ABC 上にあるから、 s, t, u を実数とすると、 \vec{OH} は次のように表せる。

$$\vec{OH}=s\vec{OA}+t\vec{OB}+u\vec{OC}, s+t+u=1$$

よって $\vec{OH}=(s, 2t, -u)$

また $\vec{AB}=(-1, 2, 0)$, $\vec{AC}=(-1, 0, -1)$

- OH は平面 ABC に垂直であるから、 \vec{OH} は \vec{AB} と \vec{AC} の両方に垂直である。

$$\vec{OH}\cdot\vec{AB}=0 \text{ から } s\times(-1)+2t\times 2+(-u)\times 0=0$$

式を整理して $t=\frac{s}{4}$ ①

$$\vec{OH}\cdot\vec{AC}=0 \text{ から } s\times(-1)+2t\times 0+(-u)\times(-1)=0$$

式を整理して $u=s$ ②

①, ② を $s+t+u=1$ に代入すると $\frac{9}{4}s=1$

よって $s=\frac{4}{9}, t=\frac{1}{9}, u=\frac{4}{9}$

したがって $\vec{OH}=\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$

$$|\vec{OH}|=\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

以上から、点 H の座標は $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$ また、線分 OH の長さは $OH=\frac{2}{3}$