

[1] $|\vec{a}|=4$ のとき、 \vec{a} と平行で大きさが8のベクトルを \vec{a} を用いて表せ。

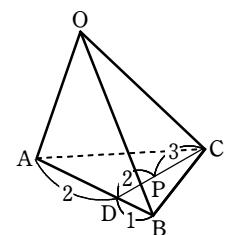
[5] 2点 A(\vec{a}), B(\vec{b})を結ぶ線分 AB を 4 : 3 に内分する点、外分する点の位置ベクトルを \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

[8] 次のベクトル \vec{a} , \vec{b} が垂直になるように、 x の値を定めよ。
 $\vec{a}=(1, 2, x)$, $\vec{b}=(-x^2, 2, 3)$

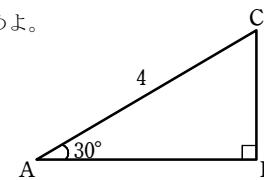
[2] $\vec{a}=(4, 2)$, $\vec{b}=(-3, 5)$ とする。ベクトル $\vec{q}=(-4, 6)$ を、適当な実数 s , t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

[6] $\overrightarrow{OA}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{a}-5\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=-5\vec{a}+7\vec{b}$ とする。
(1) \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
(2) 3点 A, B, Cは一直線上にあることを証明せよ。

[9] 四面体 OABCにおいて、辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D,
線分 CD を 3 : 2 に内分する点を P とする。 \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OA} ,
 \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} を用いて表せ。

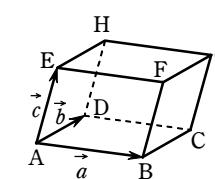


[3] 右の図の直角三角形 ABCにおいて、内積 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ を求めよ。



[4] 次の2つのベクトルのなす角 θ を求めよ。 $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(2, 6)$

[7] 平行六面体 ABCD-EFGHにおいて、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$,
 $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを、それぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
(1) \overrightarrow{HC} (2) \overrightarrow{GA} (3) \overrightarrow{FH}

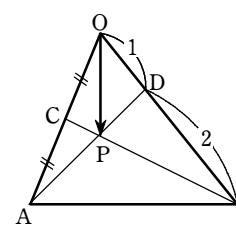


[10] yz 平面に関して点 P(3, 4, 5)と対称な点の座標を求めよ。

[11] 点 C(3, -1, 0)を中心とし、点 A(1, 1, 2)を通る球面の方程式を求めよ。

[1] $\vec{a}=(9, 3)$, $\vec{b}=(-1, -2)$ と実数 t に対して, $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。 $|\vec{c}|$ の最小値と, そのときの t の値を求めよ。

[4] $\triangle OAB$ において, 辺 OA の中点を C , 辺 OB を $1:2$ に内分する点を D とし, 線分 AD と線分 BC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき, \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。



[6] 3点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, 2, 3)$, $C(5, 2, 5)$ の定める平面ABC上に点 $D(-2, -1, z)$ があるとき, z の値を求めよ。

[2] $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, \vec{a} と \vec{b} のなす角が 150° のとき, $|3\vec{a}+2\vec{b}|$ の値を求めよ。

[7] $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, -1)$ とする。平面ABCに, 原点Oから垂線OHを下ろす。点Hの座標と線分 OHの長さを求めよ。

[3] $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ とする。 $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直であるように, 実数 t の値を定めよ。

[5] $OA=7$, $OB=3$, $AB=6$ である $\triangle OAB$ の内心を I とし, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。
 (1) $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を D とするとき, \overrightarrow{OD} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
 (2) \overrightarrow{OI} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

- 1 $\vec{a} = (9, 3)$, $\vec{b} = (-1, -2)$ と実数 t に対して, $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ とする。 $|\vec{c}|$ の最小値と, そのときの t の値を求めよ。

⑥

解答 $t=3$ で最小値 $3\sqrt{5}$
 $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b} = (9, 3) + t(-1, -2) = (9-t, 3-2t)$
 $|\vec{c}|^2 = (9-t)^2 + (3-2t)^2 = 5t^2 - 30t + 90$
 $= 5(t-3)^2 + 45$

よって, $|\vec{c}|^2$ は $t=3$ で最小値 45 をとる。

$|\vec{c}| \geq 0$ であるから, $|\vec{c}|^2$ が最小のとき $|\vec{c}|$ も最小となり, 最小値は $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

したがって $t=3$ で 最小値 $3\sqrt{5}$

- 2 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, \vec{a} と \vec{b} のなす角が 150° のとき, $|3\vec{a} + 2\vec{b}|$ の値を求めよ。

解答 $\sqrt{13}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 150^\circ = \sqrt{3} \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } |3\vec{a} + 2\vec{b}|^2 &= 9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 9 \times (\sqrt{3})^2 + 12 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 4 \times 1^2 = 13 \end{aligned}$$

$$|3\vec{a} + 2\vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |3\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{13}$$

- 3 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ とする。 $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ が垂直であるように, 実数 t の値を定めよ。

解答 $t = -1$

$$\vec{a} + \vec{b} \text{ と } \vec{a} + t\vec{b} \text{ が垂直であるとき } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = 0$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + t\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + t|\vec{b}|^2$$

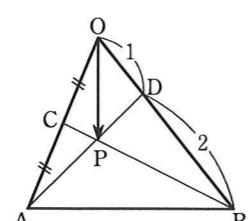
$$= 2^2 + t \times (-3) + (-3) + t \times 2^2$$

$$= t+1$$

$$t+1=0 \text{ より } t=-1$$

- 4 $\triangle OAB$ において, 辺 OA の中点を C , 辺 OB を $1:2$ に内分する点を D とし, 線分 AD と線分 BC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

解答 $\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$



4でやめねうづ
で用ひてもいいが
SCTの説明
でよろしく

AP : PD = $s : (1-s)$ すると

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD}$$

$$= (1-s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b} \quad \text{..... ①}$$

BP : PC = $t : (1-t)$ すると

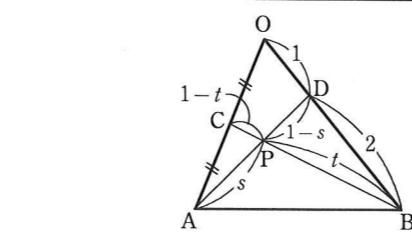
$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{1}{2}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \text{..... ②}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で, \vec{a} と \vec{b} は平行でないから, ①, ②より $1-s = \frac{1}{2}t$, $\frac{1}{3}s = 1-t$

これを解くと $s = \frac{3}{5}$, $t = \frac{4}{5}$

よって $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$



$\frac{2}{5}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB}$

- 5 $OA = 7$, $OB = 3$, $AB = 6$ である $\triangle OAB$ の内心を I とし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

(1) $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を D とするとき, \overrightarrow{OD} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。(2) \overrightarrow{OI} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

⑤

解答 (1) $\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{7}{10}\vec{b}$ (2) $\frac{3}{16}\vec{a} + \frac{7}{16}\vec{b}$

(1) OD は $\angle AOB$ の二等分線であるから

$$AD : DB = OA : OB = 7 : 3$$

よって $\overrightarrow{OD} = \frac{3\vec{a} + 7\vec{b}}{7+3} = \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{7}{10}\vec{b}$

(2) $AD = 6 \times \frac{7}{10} = \frac{21}{5}$

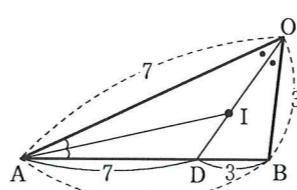
AI は $\angle OAD$ の二等分線であるから

$$OI : ID = AO : AD = 7 : \frac{21}{5} = 5 : 3$$

よって, I は線分 OD を $5:3$ に内分する点である。

したがって

$$\overrightarrow{OI} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OD} = \frac{5}{8} \times \left(\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{7}{10}\vec{b} \right) = \frac{3}{16}\vec{a} + \frac{7}{16}\vec{b}$$



- 6 3点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, 2, 3)$, $C(5, 2, 5)$ の定める平面 ABC 上に点 $D(-2, -1, z)$ があるとき, z の値を求める。

解答 $z = -6$ 点 D が平面 ABC 上にあるから, $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ (s, t は実数) とおく。

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1), \overrightarrow{AC} = (2, 1, 3), \overrightarrow{AD} = (-5, -2, z-2) \text{ であるから}$$

$$(-5, -2, z-2) = s(1, 1, 1) + t(2, 1, 3)$$

$$= (s+2t, s+t, s+3t)$$

よって $s+2t = -5$ ①

$s+t = -2$ ②

$s+3t = z-2$ ③

①, ②を解くと $s=1, t=-3$

これを ③に代入して $z=-6$

- 7 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, -1)$ とする。平面 ABC に, 原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

⑥

解答 $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$, $OH = \frac{2}{3}$

点 H は平面 ABC 上にあるから, $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ (s, t は実数) とおくと

$$\overrightarrow{OH} = (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

よって $\overrightarrow{OH} = (1-s-t, 2s, -t)$

また $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, -1)$

 OH は平面 ABC に垂直であるから, \overrightarrow{OH} は \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} の両方に垂直である。

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ から } (1-s-t) \times (-1) + 2s \times 2 + (-t) \times 0 = 0$$

式を整理して $5s + t - 1 = 0$ ①

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ から } (1-s-t) \times (-1) + 2s \times 0 + (-t) \times (-1) = 0$$

式を整理して $s + 2t - 1 = 0$ ②

①, ②を解くと $s = \frac{1}{9}$, $t = \frac{4}{9}$

したがって $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$,

$$|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

以上から, 点 H の座標は $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$

また, 線分 OH の長さは $OH = \frac{2}{3}$

別解 点 H が平面 ABC 上にあるから, s, t, u を実数とすると, \overrightarrow{OH} は次のように表せる。

$$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}, s+t+u=1$$

よって $\overrightarrow{OH} = (s, 2t, -u)$

また $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, -1)$

 OH は平面 ABC に垂直であるから, \overrightarrow{OH} は \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} の両方に垂直である。

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ から } s \times (-1) + 2t \times 2 + (-u) \times 0 = 0$$

式を整理して $t = \frac{s}{4}$ ①

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ から } s \times (-1) + 2t \times 0 + (-u) \times (-1) = 0$$

式を整理して $u = s$ ②

①, ②を $s+t+u=1$ に代入すると $\frac{9}{4}s = 1$

よって $s = \frac{4}{9}$, $t = \frac{1}{9}$, $u = \frac{4}{9}$

したがって $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$,

$$|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

以上から, 点 H の座標は $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$ また, 線分 OH の長さは $OH = \frac{2}{3}$