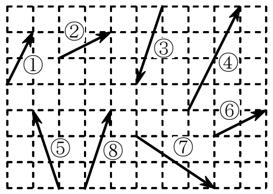
統一テスト（ベクトル）Ｈ３０．２．８　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 右の図に示されたベクトルについて，等しいベクトルの番号の組をすべてあげよ。



$\boxed{2}$ $|\vec{a}|=4$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

$\boxed{3}$ $\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，$3\vec{a}+\vec{b}$ を成分表示せよ。

$\boxed{4}$ 次の 2 つのベクトルが平行になるように，x の値を定めよ。$\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ x)$

$\boxed{5}$ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\theta=150^\circ$

$\boxed{6}$ 次の 2 つのベクトルが垂直になるように，x の値を定めよ。$\vec{a}=(x,\ 3)$，$\vec{b}=(x-7,\ 2)$

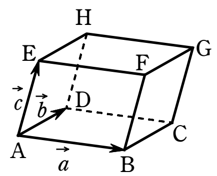
$\boxed{7}$ 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を4 : 3に内分する点，外分する点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{8}$ 点 A (4, -2) を通り，$\vec{d}=(2,\ -1)$ に平行な直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

$\boxed{9}$ 原点 O とP (1, 2, 3)の距離を求めよ。

$\boxed{10}$ 平行六面体 ABCD−EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{HC}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$



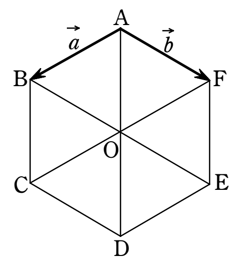
$\boxed{11}$ 2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ -3)$，$\vec{b}=(6,\ 2,\ -4)$ のなす角 θ を求めよ。

$\boxed{12}$ 3 点 A (1, 1, 5)，B (4, 3, -1)，C (-2, 1, 2) を頂点とする △ABC の重心 G の座標を求めよ。

$\boxed{13}$ 点 C (2, -1, 2) を中心とする半径 3 の球面の方程式を求めよ。

$\boxed{14}$ 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$



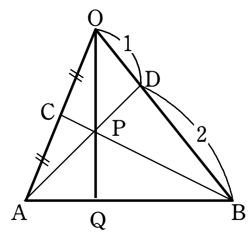
$\boxed{15}$ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき，$|2\vec{a}+\vec{b}|$ を求めよ。

$\boxed{16}$ △OABにおいて，辺 OA の中点を C, 辺 OB を 1 : 2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とし，直線OPと線分ABの交点をQとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

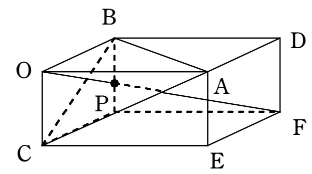


$\boxed{17}$ △ OAB において，次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

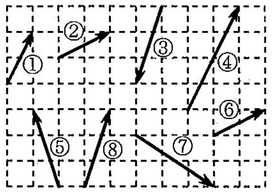
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $s+t=4$

$\boxed{18}$ OA=3 , OB=2 , ∠AOB=60° である△OABがあり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。頂点Oから線分ABに下ろした垂線の足をHとするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{19}$ 図のような直方体 OADB−CEFG において，対角線OFと平面 ABC の交点を P とする。OP : OF を求めよ。



1 右の図に示されたベクトルについて，等しいベクトルの番号の組をすべてあげよ。



解答　②と⑥　4（完解）
（いらない情報が書いてあると -2）

2 $|\vec{a}|=4$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

解答　$\frac{1}{4}\vec{a}$ と $-\frac{1}{4}\vec{a}$　4（各2）

3 $\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，$3\vec{a}+\vec{b}$ を成分表示せよ。

解答　$(0,\ -4)$　4

$3\vec{a}+\vec{b}=3(1,\ -2)+(-3,\ 2)$
$=(3,\ -6)+(-3,\ 2)=(3-3,\ -6+2)=(0,\ -4)$

4 次の2つのベクトルが平行になるように，x の値を定めよ。$\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ x)$

解答　$x=-6$　4

$\vec{a}/\!/\vec{b}$ であるには，$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k があればよい。
$(3,\ x)=k(-1,\ 2)$ から　$3=-k$，$x=2k$
$k=-3$ であるから　$x=2\times(-3)=-6$

5 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\theta=150°$

解答　$-5\sqrt{3}$　4

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos150°$
$=2\times5\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-5\sqrt{3}$　かっこなし -1

6 次の2つのベクトルが垂直になるように，x の値を定めよ。$\vec{a}=(x,\ 3)$，$\vec{b}=(x-7,\ 2)$

解答　$x=1,\ 6$　4

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるのは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のときである。
$\vec{a}\cdot\vec{b}=x\times(x-7)+3\times2$
$=x^2-7x+6$
$=(x-1)(x-6)$
よって，$(x-1)(x-6)=0$ より　$x=1,\ 6$

7 2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を4：3に内分する点，外分する点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　内分する点，外分する点の順に　$\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$，$-3\vec{a}+4\vec{b}$　6（各3）

2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対して，線分 AB を 4：3 に内分する点，外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

$\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{4+3}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$

$\frac{-3\vec{a}+4\vec{b}}{4-3}=-3\vec{a}+4\vec{b}$

8 点 A(4, −2) を通り，$\vec{d}=(2,\ -1)$ に平行な直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

解答　$\begin{cases}x=4+2t\\y=-2-t\end{cases}$；$x+2y=0$　6（各3）

$(x,\ y)=(4,\ -2)+t(2,\ -1)$ から

$\begin{cases}x=4+2t\\y=-2-t\end{cases}$

t を消去して　$x+2y=0$

9 原点 O と P(1, 2, 3)の距離を求めよ。

$1+4+9=\sqrt{14}$ はダメ

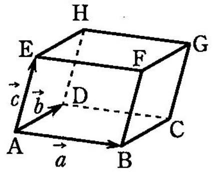
解答　$\sqrt{14}$　4

$OP=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

$\vec{OP}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ は 2

10 平行六面体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{HC}$　　(2) $\overrightarrow{GA}$



4　4

解答　(1) $\vec{a}-\vec{c}$　(2) $-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

(1) $\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC}=\vec{a}+(-\vec{c})=\vec{a}-\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EA}=-\vec{a}+(-\vec{b})+(-\vec{c})=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

11 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ -3)$，$\vec{b}=(6,\ 2,\ -4)$ のなす角 θ を求めよ。

解答　60°　4

内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times6+(-2)\times2+(-3)\times(-4)=14$
また　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$
$|\vec{b}|=\sqrt{6^2+2^2+(-4)^2}=2\sqrt{14}$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{14}{\sqrt{14}\times2\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$ → 2

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

$\cos\theta=60°$ はダメ.

12 3点 A(1, 1, 5)，B(4, 3, −1)，C(−2, 1, 2) を頂点とする △ABC の重心 G の座標を求めよ。

書き方がおかしいものは -1

解答　$\left(1,\ \frac{5}{3},\ 2\right)$　4　　$\frac{(3,5,6)}{3}$ など.

$\left(\frac{1+4-2}{3},\ \frac{1+3+1}{3},\ \frac{5-1+2}{3}\right)$ より，点 G の座標は　$\left(1,\ \frac{5}{3},\ 2\right)$

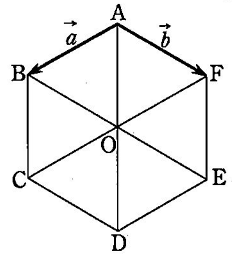
13 点 C(2, −1, 2) を中心とする半径3の球面の方程式を求めよ。

解答　$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$　4

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$　2
$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3^2$ ← 3

14 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とすると き，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{BD}$　　(2) $\overrightarrow{CA}$



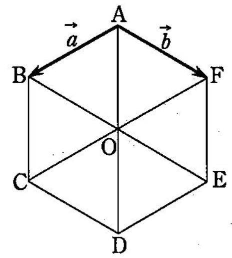
4　4

解答　(1) $\vec{a}+2\vec{b}$　(2) $-2\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}=\vec{b}$

(1) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}$
$=2\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}$
$=-2\vec{a}+(-\vec{b})=-2\vec{a}-\vec{b}$



/68.

15 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき，$|2\vec{a}+\vec{b}|$ を求めよ。

解答 $3\sqrt{5}$ 5

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=4\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times2^2+4\times5+3^2=45$ 3

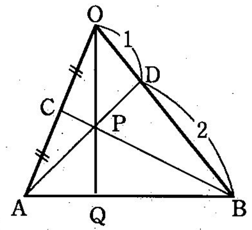
$|2\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

16 △OABにおいて，辺OAの中点をC，辺OBを1：2に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとし，直線OPと線分ABの交点をQとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



解答 (1) $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$ 5　(2) $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ 5　$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$のまま -1

(1) AP：PD$=s:(1-s)$ とすると

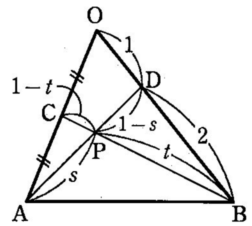
$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$

$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}$ ……①

BP：PC$=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

$=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ ……②



$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①，②より　$1-s=\frac{1}{2}t$，$\frac{1}{3}s=1-t$

これを解くと　$s=\frac{3}{5}$，$t=\frac{4}{5}$

よって　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

別解 次の項目「7 図形のベクトルによる表示」の内容を用いると，次のように解くこともできる。

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ とおく。

$\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OD}$ であるから　$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+3y\overrightarrow{OD}$

点Pは直線AD上にあるから　$x+3y=1$ ……①

$\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OC}$ であるから　$\overrightarrow{OP}=2x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OB}$

点Pは直線BC上にあるから　$2x+y=1$ ……②

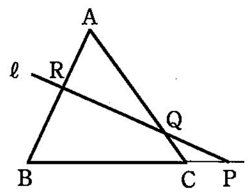
①，②を解くと　$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$

よって　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

参考 △ABCの辺BC，CA，ABまたはその延長が，三角形の頂点を通らない直線 ℓ と，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つ。



これをメネラウスの定理という（メネラウスの定理は数学Aで取り上げている）。

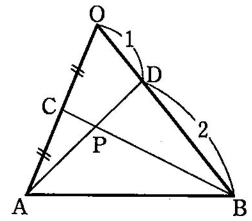
本問において，△BOCと直線ADにメネラウスの定理を用いると

$\frac{BD}{DO}\cdot\frac{OA}{AC}\cdot\frac{CP}{PB}=1$

$\frac{BD}{DO}=\frac{2}{1}$，$\frac{OA}{AC}=\frac{2}{1}$

であるから　$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{CP}{PB}=1$

すなわち　$\frac{CP}{PB}=\frac{1}{4}$



よって，Pは線分BCを4：1に内分する。

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}}{4+1}=\frac{1}{5}(\vec{b}+2\vec{a})=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

(2)　3点O，P，Qは一直線上の点であるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ なる実数 k が存在する。

(1)より $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$ であるから，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{5}k\vec{a}+\frac{1}{5}k\vec{b}$ ……①

また，AQ：QB$=u:(1-u)$ とおくと

$\overrightarrow{OQ}=u\overrightarrow{OA}+(1-u)\overrightarrow{OB}=u\vec{a}+(1-u)\vec{b}$ ……②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①，②より　$\frac{2}{5}k=u$，$\frac{1}{5}k=1-u$

これを解くと　$k=\frac{5}{3}$，$u=\frac{2}{3}$　　よって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

参考 $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{5}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}k\overrightarrow{OB}$　と表され，また点Qは直線AB上の点であるから

$\frac{2}{5}k+\frac{1}{5}k=1$　つまり　$k=\frac{5}{3}$　より　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

17 △OABにおいて，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$s+t=4$

解答 $4\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点A′，B′をとると，直線A′B′ 5

$s+t=4$ から　$\frac{s}{4}+\frac{t}{4}=1$　　直線がない -2

線分 -2

ここで，$\frac{s}{4}=s'$，$\frac{t}{4}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'(4\overrightarrow{OA})+t'(4\overrightarrow{OB})$，$s'+t'=1$

よって，$4\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点A′，B′をとると

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s'+t'=1$

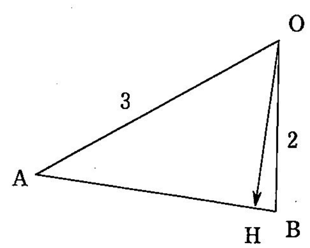
したがって，点Pの存在範囲は直線A′B′である。

18 OA=3，OB=2，∠AOB=60°である△OABがあり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。頂点Oから線分ABに下ろした垂線の足をHとするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答 $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}$ 6

AB：HB$=t:(1-t)$ とおく。

すると，$\overrightarrow{OH}=\frac{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}}{t+(1-t)}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$



となる。また，OH⊥AB　より

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ が成り立つので

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-t)|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

となる。

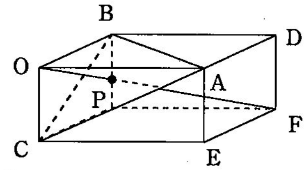
ここで，OA$=|\vec{a}|=3$，OB$=|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos60°=3$

を代入して　$(1-t)\times3-(1-t)\times3^2+t\times2^2-t\times3=0$　より　$t=\frac{6}{7}$ 4

(6:1が分かれば)

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\left(1-\frac{6}{7}\right)\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}$

19 図のような直方体OADB−CEFGにおいて，対角線OFと平面ABCの交点をPとする。OP：OFを求めよ。



解答 OP：OF＝1：3 6

Oに関する位置ベクトルを考え，$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ とする。

Pは平面ABC上にあるから，$\overrightarrow{CL}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ (s，t は実数) とおくと

$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CL}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})$

$=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$ ……①

また，Pは線分OF上にあるから，OP：OF$=k:1$ (k は実数) とおくと

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}$

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ であるから

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$ ……②

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから，$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた表し方はただ1通りである。

①，②から　$s=k$，$t=k$，$1-s-t=k$

これを解くと　$k=\frac{1}{3}$ 4

したがって　OP：OF$=\frac{1}{3}:1=1:3$

別解

Pは直線OF上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}$ (k は実数) とおける。

よって　$\overrightarrow{OF}=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$

また，Pは平面ABC上にあるから　$k+k+k=1$

すなわち　$k=\frac{1}{3}$ 4

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$　より　OP：OF$=\frac{1}{3}:1=1:3$

$\overrightarrow{OP}:\overrightarrow{OF}=1:3$

は -1

/32