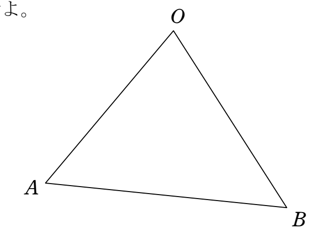
数学演習（ベクトル）Ｈ２１．２．８　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．$\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(2,-1,1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの t の値を求めよ。

２．$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{2},|\vec{a}-\vec{b}|=1$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

３．△ OAB に対して，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。$2s+4t\leqq 3,s\geqq 0,t\geqq 0$ が成り立つとき，点 P の存在範囲を図示せよ。



４．ベクトル $\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(1,-2,1)$ の両方に垂直で，大きさが３のベクトルを求めよ。

５．△ ABC の辺 AB を $3:1$ に内分する点を D，辺 AC を $2:3$ に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) AP と BC の交点を Q とする。このとき，$BQ:QC$ を簡単な整数比で表せ。

(3) $\triangle PAB:\triangle PBQ:\triangle PQC:\triangle PCA$ を簡単な整数比で表せ。

６．平行四辺形 $OACB$ において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。点 O から対角線 AB に垂線を下ろし，その足を H とする。$OA=3,OB=2,\angle AOB=60^\circ$ であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ。

７．四面体 $OABC$ において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 OA を $1:2$ に内分する点を D，辺 OB の中点を E，辺 OC を $2:3$ に内分する点を F とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle DBC$ の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OG と $\triangle DEF$ の交点を P とする。$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。

第３回定期考査　ー模擬ー　H21. 2. 8

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1．$\vec{a}=(1,2,3)$と$\vec{b}=(2,-1,1)$とする。ベクトル$\vec{a}+t\vec{b}$の大きさの最小値とそのときのtの値を求めよ。

$\vec{a}+t\vec{b}=(1+2t,\ 2-t,\ 3+t)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1+2t)^2+(2-t)^2+(3+t)^2$

$=6t^2+6t+14$

$=6(t^2+t)+14$

$=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$

よって $|\vec{a}+t\vec{b}|$ は

$t=-\frac{1}{2}$ のとき

最小値 $\frac{5}{\sqrt{2}}$ をとる。

2．$|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=\sqrt{2}, |\vec{a}-\vec{b}|=1$のとき、$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角$\theta$を求めよ。

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$1^2=1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \theta=45^\circ$

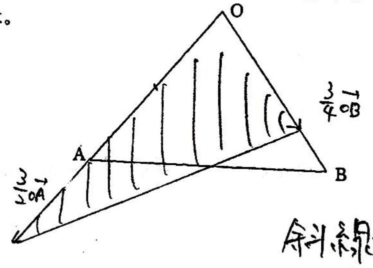
3．△OABに対して、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$とする。$2s+4t\leqq 3, s\geqq 0, t\geqq 0$であるとき、点Pの存在範囲を図示せよ。

$\frac{2}{3}s+\frac{4}{3}t\leqq 1$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$=\left(\frac{2}{3}s\right)\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}\right)$

$+\left(\frac{4}{3}t\right)\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)$



斜線部分．

ただし境界を含む．

4．ベクトル$\vec{a}=(1,2,3), \vec{b}=(1,-2,1)$の両方に垂直で、大きさが3のベクトルを求めよ。

求めるベクトルを$\vec{x}=(x, y, z)$とおくと．

$\begin{cases}\vec{x}\cdot\vec{a}=0\\ \vec{x}\cdot\vec{b}=0\\ |\vec{x}|=3\end{cases}$ を満たす

$\vec{x}\cdot\vec{a}=0$ より

$1\times x+2\times y+3\times z=0$　　$\therefore\ x+2y+3z=0$ …①

$\vec{x}\cdot\vec{b}=0$ より

$1\times x+(-2)\times y+1\times z=0$　　$\therefore\ x-2y+z=0$ …②

$|\vec{x}|=3$ より $|\vec{x}|^2=9$　　$\therefore\ x^2+y^2+z^2=9$ …③

①②より $x=-2z,\ y=-\frac{1}{2}z$ より．③に代入して．

$(-2z)^2+\left(-\frac{1}{2}z\right)^2+z^2=9$　　$\therefore\ z=\pm\frac{6}{\sqrt{21}}$

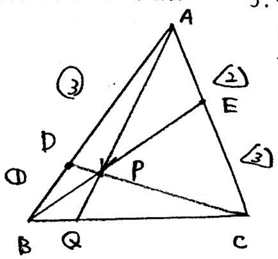
よって

$\vec{x}=\left(\frac{12}{\sqrt{21}}, \frac{3}{\sqrt{21}}, -\frac{6}{\sqrt{21}}\right)$

$=\left(-\frac{12}{\sqrt{21}}, -\frac{3}{\sqrt{21}}, \frac{6}{\sqrt{21}}\right)$

△ABCの辺ABを3：1に内分する点をD、辺ACを2：3に内分する点をEとし、線分BE
線分CDの交点をPとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$とするとき

(1)　$\overrightarrow{AP}$を$\vec{b}, \vec{c}$を用いて表せ。



D.P.Cは一直線上より

$\overrightarrow{DP}=s\overrightarrow{DC}$　　$\therefore\ \overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AD}+s\overrightarrow{AC}$

$=\frac{3}{4}(1-s)\vec{b}+s\vec{c}.$

E.P.Bは一直線上より

$\overrightarrow{EP}=t\overrightarrow{EB}$　　$\therefore\ \overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{AB}$

$=t\vec{b}+\frac{2}{5}(1-t)\vec{c}$

係数比較して $\begin{cases}\frac{3}{4}(1-s)=t\\ s=\frac{2}{5}(1-t).\end{cases}$　　これを解いて　$s=\frac{1}{7}, t=\frac{9}{14}$

$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{9}{14}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$

(2)　APとBCの交点をQとする。BQ:QCを求めよ。

$\overrightarrow{BQ}=k\overrightarrow{BC}$ とおくと．　$\overrightarrow{AQ}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$

$=(1-k)\vec{b}+k\vec{c}.$

また．A.P.Qは一直線上より

$\overrightarrow{AQ}=m\overrightarrow{AP}=m\left(\frac{9}{14}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}\right)=\frac{9}{14}m\vec{b}+\frac{1}{7}m\vec{c}$

係数比較して $\begin{cases}1-k=\frac{9}{14}m\\ k=\frac{1}{7}m\end{cases}$　　これを解いて　$m=\frac{14}{11}, k=\frac{2}{11}$

$\therefore\ \overrightarrow{BQ}=\frac{2}{11}\overrightarrow{BC}$

より　BQ：QC＝2：9

(3)　△PAB:△PBQ：△PQC：△PCAを求めよ。

(2)より．$\overrightarrow{AQ}=\frac{14}{11}\overrightarrow{AP}$ より　AP：PQ＝11：3

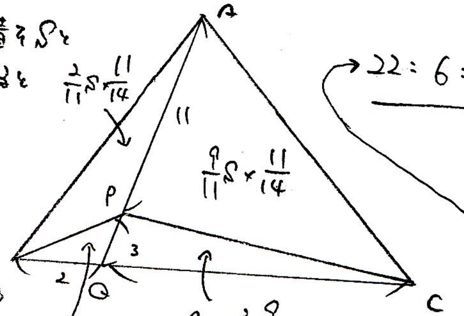
△ABCの面積をSとすると

BQ：QC＝2：9

より

$\triangle ABQ=\frac{2}{11}S$

$\triangle ACQ=\frac{9}{11}S$

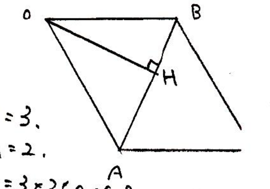


よって

$\triangle PAB:\triangle PBQ:\triangle PQC:\triangle PCA=\frac{2}{11}S\times\frac{11}{14}:\frac{2}{11}S\times\frac{3}{14}:\frac{9}{11}S\times\frac{3}{14}:\frac{9}{11}S\times\frac{11}{14}$

$=22:6:27:99$

．平行四辺形OACBにおいて、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$とする。点Oから対角線ABに垂線を下ろし、その足をHとする。OA＝3、OB＝2、∠AOB＝６０°であるとき、$\overrightarrow{OH}$を$\vec{a}, \vec{b}$を用いて表せ。



A、H，Bは一直線上より

$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AB}$ とおくと．

$\overrightarrow{OH}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$|\vec{a}|=3,$
$|\vec{b}|=2,$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times 2\times\cos 60^\circ=3$ より

また．

OH⊥AB より

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=0$

$-(1-t)|\vec{a}|^2+(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

これを解いて

$t=\frac{6}{7}$　　$\therefore\ \overrightarrow{OH}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}$

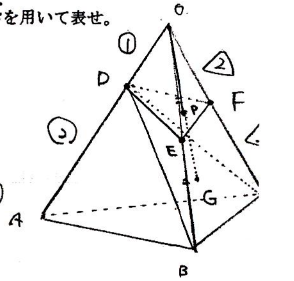
7．四面体OABCにおいて、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする。辺OAを1：2に内分する点をD、辺OBの中点をE、辺OCを2：3に内分する点をFとする。

(1)　△DBCの重心をGとするとき、$\overrightarrow{OG}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$を用いて表せ。

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$　$=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(2)　直線OGと△DEFの交点をPとする。$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$を用いて表せ。



O.P.G．は一直線上より

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}=k\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{9}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$ …①

また．Pは平面DEF上より

$\overrightarrow{DP}=s\overrightarrow{DE}+t\overrightarrow{DF}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{OE}+t\overrightarrow{OF}$

$=\frac{1}{3}(1-s-t)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{2}{5}t\vec{c}.$ …②

①②より係数を比較して

$\begin{cases}\frac{1}{9}k=\frac{1}{3}(1-s-t)\\ \frac{1}{3}k=\frac{1}{2}s\\ \frac{1}{3}k=\frac{2}{5}t.\end{cases}$　　これを解いて．　$k=\frac{6}{11}, s=\frac{4}{11}, t=\frac{5}{11}$

$\therefore$

$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{11}\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=\frac{2}{33}\vec{a}+\frac{2}{11}\vec{b}+\frac{2}{11}\vec{c}$