１．$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

２．次の点 A を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線の方程式をベクトルを用いて求めよ。
A $(-1,\ 2)$，$\vec{d}=(2,\ -3)$

３．△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1)　辺 OA を 3 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 4 に内分する点を D とし，線分 AD と BC との交点を P とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P，辺 AB を 3 : 4 に内分する点を Q とし，線分 OQ と BP の交点を C とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

４．3 点 O $(0,\ 0)$，A $(2,\ 0)$，B $(1,\ 2)$ がある。実数 s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表される点 P の存在範囲を図示せよ。
$0\leqq s\leqq 1$，$1\leqq t\leqq 3$

５．異なる 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ がある。点 P$(\vec{p})$ に対し，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数) と表されるとき，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。
$2s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

6．△OABに対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s，t は実数) とする。s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，点Pの描く図形を図示せよ。

(1)　$s+t=3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(2)　$s+t\leqq \dfrac{1}{3}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

7．平行四辺形ABCDにおいて，辺ABを3 : 2に内分する点をE，対角線BDを2 : 5に内分する点をFとする。このとき，3点E，F，Cは一直線上にあることを証明せよ。

8．3点A(2，1，−3)，B(−1，5，−2)，C(4，3，−1)がある。四角形ABCDが平行四辺形となるとき，点Dの座標を求めよ。

9．平行六面体OADB−CEGFにおいて，辺DGのGを越える延長上にGM=2GDとなるように点Mをとり，直線OMと平面ABCの交点をNとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

10．次のような球面の方程式を求めよ。

(1)　原点を中心とする半径2の球面

(2)　点(3，−2，1)を中心とする半径1の球面

(3)　点A(1，2，−1)を中心とし，点B(3，−1，3)を通る球面

11．球面 $(x+2)^2+(y-5)^2+(z-8)^2=10^2$ と，xy 平面が交わる部分は円を表す。その中心の座標と半径を求めよ。

数学演習（ベクトル）Ｈ２４．９．２１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$,　$t=-\dfrac{12}{7}$

$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ であるから　$|\vec{a}-4\vec{b}|^2=7^2$

よって　$|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2=49$　　ゆえに　$3^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16\times2^2=49$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$ となるための条件は　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

すなわち　$|\vec{a}|^2+(1+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

よって　$3^2+(1+t)\times3+t\times2^2=0$

したがって　$t=-\dfrac{12}{7}$

2. 次の点 A を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線の方程式をベクトルを用いて求めよ。

A $(-1,\ 2)$, $\vec{d}=(2,\ -3)$

解答　$3x+2y=1$

原点を O，直線上の任意の点を P $(x,\ y)$, t を実数とする。

$\overrightarrow{AP}$ は $\vec{d}$ に平行なので $\overrightarrow{AP}=t\vec{d}$ とおける

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$ より　$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\vec{d}$　なので

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$ から　$(x,\ y)=(-1,\ 2)+t(2,\ -3)=(-1+2t,\ 2-3t)$

よって　$x=-1+2t$ ……①,　$y=2-3t$ ……②

①×3＋②×2 から t を消去して　$3x+2y=1$

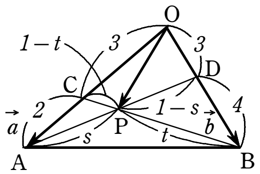
3. △OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1)　辺 OA を 3 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 4 に内分する点を D とし，線分 AD と BC との交点を P とする。このとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(2)　辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P，辺 AB を 3 : 4 に内分する点を Q とし，線分 OQ と BP の交点を C とする。このとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

解答　(1)　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{6}{13}\vec{a}+\dfrac{3}{13}\vec{b}$　　(2)　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{4}{15}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

(1)　AP : PD$=s:(1-s)$，BP : PC$=t:(1-t)$ とすると



$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{3}{7}s\vec{b}$,

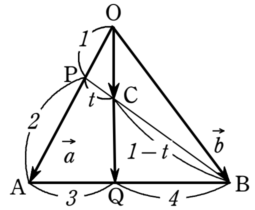
$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

よって　$(1-s)\vec{a}+\dfrac{3}{7}s\vec{b}=\dfrac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$1-s=\dfrac{3}{5}t$,　$\dfrac{3}{7}s=1-t$

これを解いて　$s=\dfrac{7}{13}$, $t=\dfrac{10}{13}$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{6}{13}\vec{a}+\dfrac{3}{13}\vec{b}$

(2)　PC : CB$=t:(1-t)$ とすると



$\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{1-t}{3}\vec{a}+t\vec{b}$

$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OQ}$ (k は実数) とおけるから

$\overrightarrow{OC}=k\cdot\dfrac{4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+4}=\dfrac{4}{7}k\vec{a}+\dfrac{3}{7}k\vec{b}$

よって　$\dfrac{1-t}{3}\vec{a}+t\vec{b}=\dfrac{4}{7}k\vec{a}+\dfrac{3}{7}k\vec{b}$

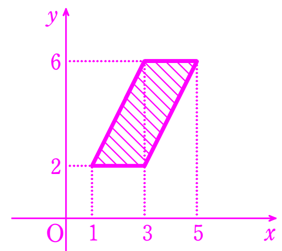
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\dfrac{1-t}{3}=\dfrac{4}{7}k$,　$t=\dfrac{3}{7}k$

これを解いて　$t=\dfrac{1}{5}$, $k=\dfrac{7}{15}$　　したがって　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{4}{15}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

4. 3 点 O $(0,\ 0)$，A $(2,\ 0)$，B $(1,\ 2)$ がある。実数 s, t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で表される点 P の存在範囲を図示せよ。

$0\leqq s\leqq1$,　$1\leqq t\leqq3$

解答　[図] の斜線部分　ただし，境界線を含む



$s=k$ (k は定数) とすると，$0\leqq k\leqq1$ で

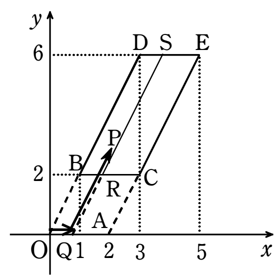
$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OA}$ とすると　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{OB}$

t の値が 1 から 3 まで変化すると，点 P は線分 RS 上を R から S まで動く。

ただし　$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OB}$

次に，k の値が 0 から 1 まで変化すると，点 R，S は，RS∥BD(∥CE) の状態を保ちながら，それぞれ線分 BC 上，DE 上を，B から C，D から E まで動く。

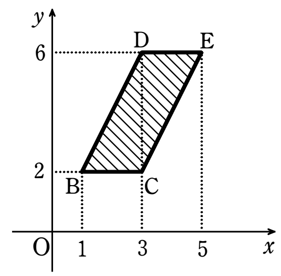


ただし　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(3,\ 2)$, $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}=(3,\ 6)$, $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=(5,\ 6)$

よって，点 P の存在範囲は　平行四辺形 BCED の周および内部

[図] の斜線部分。ただし，境界線を含む。

注意　平行四辺形の各頂点の座標をしっかり求める。



5. 異なる 2 点 A $(\vec{a})$，B $(\vec{b})$ がある。点 P $(\vec{p})$ に対し，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s, t は実数) と表されるとき，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

$2s+t=2$,　$s\geqq0$,　$t\geqq0$

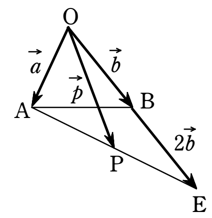
解答　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OB}$ となるような点 E をとると　線分 AE

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

$2s+t=2$ から　$s+\dfrac{t}{2}=1$

$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと　$s+t'=1$, $s\geqq0$, $t'\geqq0$

$\vec{p}=s\vec{a}+\dfrac{t}{2}(2\vec{b})$ であるから　$\vec{p}=s\vec{a}+t'(2\vec{b})$



よって，$\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OB}$ となるような点 E をとると，

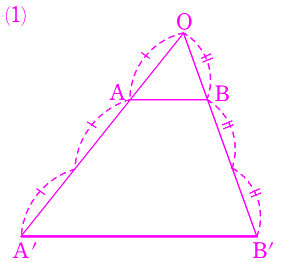
点 P $(\vec{p})$ の存在範囲は線分 AE である。

6. △OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (s, t は実数) とする。s, t が次の条件を満たしながら変化するとき，点 P の描く図形を図示せよ。

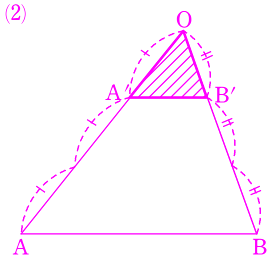
(1)　$s+t=3$, $s\geqq0$, $t\geqq0$　　　(2)　$s+t\leqq\dfrac{1}{3}$, $s\geqq0$, $t\geqq0$

解答　(1), (2)　[図]　(2) は境界線を含む

(1)



(2)



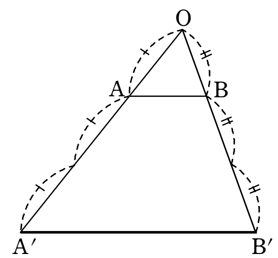
(1)　$s+t=3$ から　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{3}=1$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$, $\dfrac{t}{3}=t'$, $3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$,

$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$, $s'+t'=1$, $s'\geqq0$, $t'\geqq0$



よって，点 P が描く図形は線分 $A'B'$ 〔図〕

(2)　$s+t\leqq\dfrac{1}{3}$ から　　$3s+3t\leqq1$

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

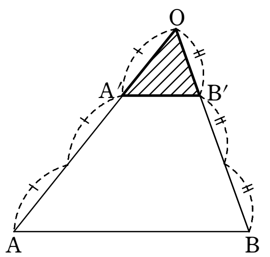
$$=3s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right)+3t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

ここで，$3s=s'$，$3t=t'$，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，

$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'},\quad s'+t'\leqq1,\quad s'\geqq0,\quad t'\geqq0$$

よって，点 P が描く図形は $\triangle OA'B'$ の周および内部 〔図〕



7. 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $3:2$ に内分する点を E，対角線 BD を $2:5$ に内分する点を F とする。このとき，3 点 E，F，C は一直線上にあることを証明せよ。

解答　略

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると

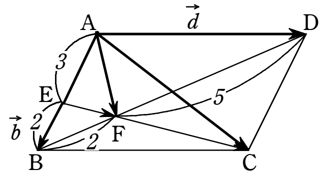
$$\overrightarrow{AF}=\frac{5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}}{2+5}=\frac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\vec{b},\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{d}$$

よって　　$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\dfrac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$$=\frac{2}{35}(2\vec{b}+5\vec{d})$$

$$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=(\vec{b}+\vec{d})-\frac{3}{5}\vec{b}$$

$$=\frac{2\vec{b}+5\vec{d}}{5}$$



したがって，$\overrightarrow{EF}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{EC}$ であるから，3 点 E，F，C は一直線上にある。

8. 3 点 A(2，1，−3)，B(−1，5，−2)，C(4，3，−1) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，点 D の座標を求めよ。

解答　(7，−1，−2)

点 D の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ から

$$(x-2,\ y-1,\ z-(-3))=(4-(-1),\ 3-5,\ -1-(-2))$$

よって　　$x-2=5$，$y-1=-2$，$z+3=1$

ゆえに　　$x=7$，$y=-1$，$z=-2$

したがって，点 D の座標は　　(7，−1，−2)

9. 平行六面体 OADB−CEGF において，辺 DG の G を越える延長上に GM=2GD となるように点 M をとり，直線 OM と平面 ABC の交点をNとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

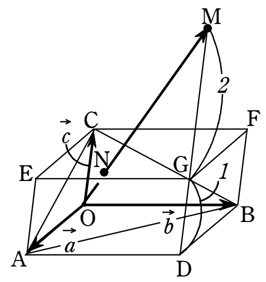
解答　$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

点 N は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{CN}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s，t がある。

よって　　$\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC}=s(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$

ゆえに　　$\overrightarrow{ON}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$

また，点 N は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ となる実数 k がある。



ここで　　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$

よって　　$\overrightarrow{ON}=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$

ゆえに　　$s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$s=k$　…… ①，　$t=k$　…… ②，　$1-s-t=3k$　…… ③

①，② を ③ に代入すると　　$1-k-k=3k$　　　よって　　$k=\dfrac{1}{5}$

したがって　　$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

別解　点 N は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ となる実数 k がある。

よって　　$\overrightarrow{ON}=k(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$

点 N は平面 ABC 上にあるから　　$k+k+3k=1$

ゆえに　　$k=\dfrac{1}{5}$　　　したがって　　$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

注意　点 P が平面 ABC 上にある

$$\iff \overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\quad s+t+u=1\ (s,\ t,\ u \text{ は実数})$$

10. 次のような球面の方程式を求めよ。

(1)　原点を中心とする半径 2 の球面

(2)　点 (3，−2，1) を中心とする半径 1 の球面

(3)　点 A(1，2，−1) を中心とし，点 B(3，−1，3) を通る球面

解答　(1)　$x^2+y^2+z^2=4$　　(2)　$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$

(3)　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=29$

(1)　$x^2+y^2+z^2=2^2$　　すなわち　　$x^2+y^2+z^2=4$

(2)　$(x-3)^2+\{y-(-2)\}^2+(z-1)^2=1^2$　　すなわち　　$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$

(3)　半径は線分 AB の長さに等しい。

ここで　　$AB=\sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2+\{3-(-1)\}^2}=\sqrt{29}$

よって，求める球面の方程式は　　$(x-1)^2+(y-2)^2+\{z-(-1)\}^2=(\sqrt{29})^2$

すなわち　　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=29$

11. 球面 $(x+2)^2+(y-5)^2+(z-8)^2=10^2$ と，xy 平面が交わる部分は円を表す。その中心の座標と半径を求めよ。

解答　中心，半径の順に　(−2，5，0)，6

球面の方程式で，$z=0$ とすると

$$(x+2)^2+(y-5)^2+(0-8)^2=10^2$$

よって　　$(x+2)^2+(y-5)^2=36$

この方程式は，xy 平面上では円を表す。

その中心の座標は　(−2，5，0)，　半径は　$\sqrt{36}=6$