確認テスト（ベクトル）Ｈ２１．６．９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．$\triangle ABC$において，辺 AB を$1:2$に内分する点を D，辺 AC を$3:1$に内分する点をEとする。また，２つの線分 CD, BE の交点を P，直線 AP と辺 BC の交点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP}$ を$\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) $BP:PE, CP:PD$ を簡単な整数比で表せ。

(3) $\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(4) $AP:PQ$ を簡単な整数比で表せ。

２．$\triangle OAB$ において，$OA=2$, $OB=3$, $AB=4$ である。点 O から辺 AB に下ろした垂線を OH とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

３．$\vec{a}=(3, 4)$ が成り立つとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}$ に平行な単位ベクトルを求めよ。

(2) $\vec{a}$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

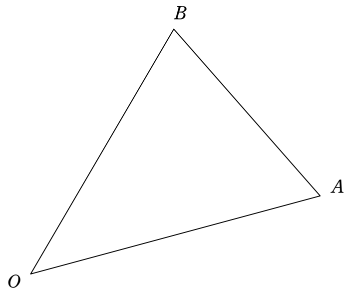
４．三角形 ABC と点 P があり，$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。

(1) 点 P の位置をいえ。

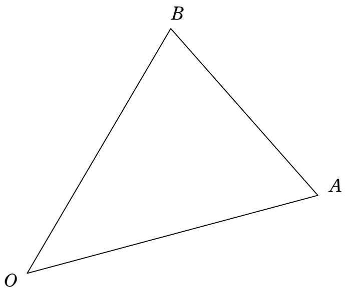
(2) 面積比 $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA$ を求めよ。

5．△OAB において，実数 s , t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ を満たす点 P はどんな図形上にあるか。その図形を図示せよ。

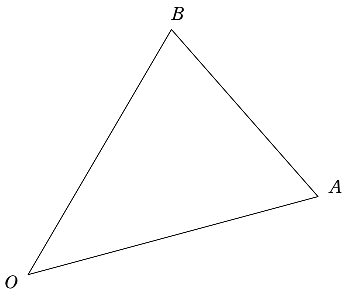
(1) $s+t=1$



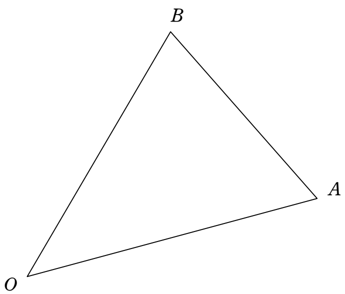
(2) $s+t=1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$



(3) $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$



(4) $2s+3t\leqq 1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$



6．$\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$ が成り立つとき，以下の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

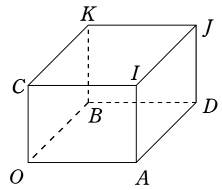
(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度 θ を求めよ。

7．球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$ について，以下の問いに答えよ。

(1) この球面の中心の座標と半径を求めよ。

(2) この球面と xy 平面との交わりは円となる。その円の中心の座標と半径を求めよ。

8．平行六面体 $OADB-CIJK$ において，辺 DJ の中点を M とし，直線 OM と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。



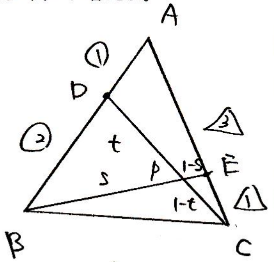
(1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $OP:OM$ を簡単な整数比で表せ。

1．△ABCにおいて，辺ABを1:2に内分する点をD，辺ACを3:1に内分する点をEとする。また，２つの線分CD, BEの交点をP，直線APと辺BCの交点をQとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP}$を$\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。



DP : PC = t : 1−t とおくと

$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AC}$

$=(1-t)\frac{1}{3}\vec{b}+t\vec{c}$ …(i)

BP : PE = s : 1−s とおくと

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}$

$=(1-s)\vec{b}+s\frac{3}{4}\vec{c}$ …(ii)

(i)(ii)より $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ から 係数比較して

$\begin{cases}\frac{1}{3}(1-t)=1-s\\ t=\frac{3}{4}s\end{cases}$

∴ $s=\frac{8}{9}$, $t=\frac{2}{3}$

∴ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

(2) BP : PE, CP : PDを簡単な整数比で表せ。

(1)より $s=\frac{8}{9}$ より BP : PE $=\frac{8}{9}:\frac{1}{9}$ = 8 : 1

$t=\frac{2}{3}$ より CP : PD $=(1-\frac{2}{3}):\frac{2}{3}$ = 1 : 2

(3) $\overrightarrow{AQ}$を$\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。

A, P, Qは一直線上より

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=\frac{1}{9}k\vec{b}+\frac{2}{3}k\vec{c}$ …(*)

とおける。また Qは直線BC上より(*)から

$\frac{1}{9}k+\frac{2}{3}k=1$

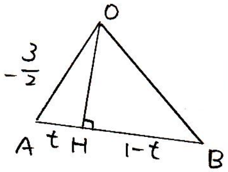
∴ $k=\frac{9}{7}$

よって $\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{6}{7}\vec{c}$

(4) AP : PQを簡単な整数比で表せ。

(3)より $\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{7}\overrightarrow{AP}$ より AP : PQ = 7 : 2

2．△OABにおいて，OA=2, OB=3, AB=4である。点Oから辺ABに下ろした垂線をOHとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とおくとき，$\overrightarrow{OH}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ。



$AB^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

より $4^2=2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2$ ∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$

また AH : HB = t : 1−t とおくと

$\overrightarrow{OH}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ となり，また OH ⊥ AB より

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-t)|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$ を代入して

$(1-t)(-\frac{3}{2})-(1-t)\cdot2^2+t\cdot3^2-t(-\frac{3}{2})=0$

∴ $t=\frac{11}{32}$ より $\overrightarrow{OH}=\frac{21}{32}\vec{a}+\frac{11}{32}\vec{b}$

3．$\vec{a}=(3,4)$が成り立つとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}$に平行な単位ベクトルを求めよ。

$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ より $\vec{a}$に平行な単位ベクトルは

$\pm\frac{1}{5}\vec{a}=\pm\frac{1}{5}(3,4)$

よって $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, $(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$

(2) $\vec{a}$に垂直な単位ベクトルを求めよ。

$\vec{e}=(x,y)$ とすると $|\vec{e}|=1$ より

$|\vec{e}|^2=x^2+y^2=1$ …(i)

また $\vec{a}\perp\vec{e}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{e}=3\cdot x+4\cdot y=0$ …(ii)

(ii)より $y=-\frac{3}{4}x$ で，(i)に代入して

$x^2+(-\frac{3}{4}x)^2=1$

$\frac{25}{16}x^2=1$ ∴ $x=\pm\frac{4}{5}$

この時 $y=-\frac{3}{4}(\pm\frac{4}{5})$

$=\mp\frac{3}{5}$

以上より $\vec{e}=(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$, $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

4．三角形ABCと点Pがあり，$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}=\vec{0}$を満たしている。

(1) 点Pの位置をいえ。

A, B, C, Pの位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ とすると

$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\Longleftrightarrow 4(\vec{a}-\vec{p})+5(\vec{b}-\vec{p})+6(\vec{c}-\vec{p})=\vec{0}$

$\Longleftrightarrow 15\vec{p}=4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}$

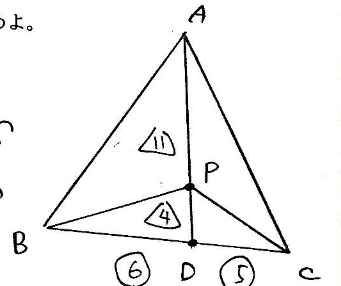
$\Longleftrightarrow \vec{p}=\frac{4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}}{15}$

$=\frac{4\vec{a}+\frac{5\vec{b}+6\vec{c}}{11}\cdot 11}{15}$

ここで，$\vec{d}=\frac{5\vec{b}+6\vec{c}}{11}$ とおくと $\vec{p}=\frac{4\vec{a}+11\vec{d}}{15}$

よって，辺BCを6:5に内分する点をDとする時 ADを11:4に内分する点がP

(2) 面積比△PAB : △PBC : △PCAを求めよ。



△ABCの面積をSとする。

△ABD $=\frac{6}{11}$△ABC $=\frac{6}{11}S$

△ACD $=\frac{5}{11}$△ABC $=\frac{5}{11}S$

よって，

△PAB $=\frac{11}{15}$△ABD $=\frac{11}{15}\cdot\frac{6}{11}S=\frac{2}{5}S$

△PCA $=\frac{11}{15}$△ACD $=\frac{11}{15}\cdot\frac{5}{11}S=\frac{1}{3}S$

△PBC = △ABC $-(\frac{2}{5}S+\frac{1}{3}S)$

$=S-\frac{11}{15}S=\frac{4}{15}S$

∴

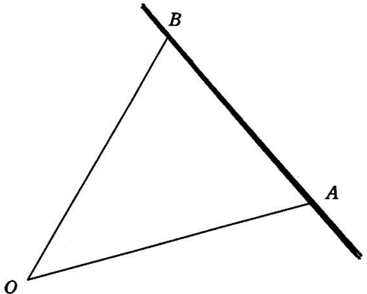
△PAB : △PBC : △PCA

$=\frac{2}{5}S:\frac{4}{15}S:\frac{1}{3}S$ = 6 : 4 : 5

5．△OABにおいて，実数 s, t が次の条件を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ を満たす点 P はどんな図形上にあるか。その図形を図示せよ。

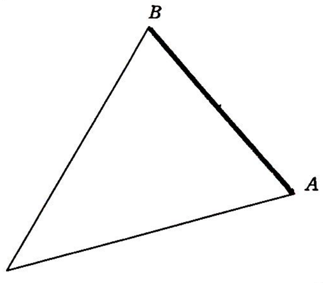
(1) $s+t=1$

直線AB



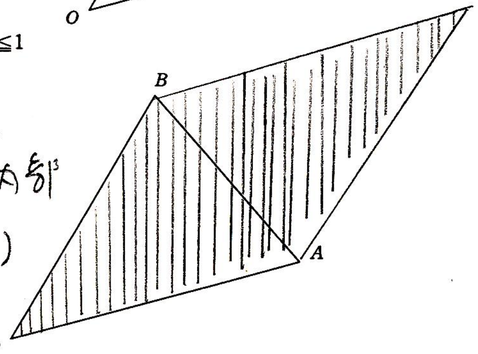
(2) $s+t=1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$

線分AB



(3) $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$

平行四辺形
OACBの内部
(境界含む)

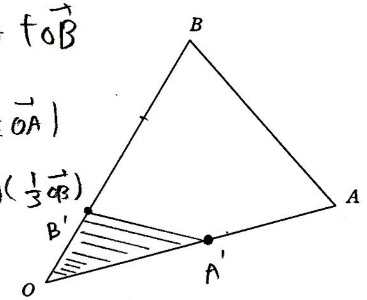


(4) $2s+3t\leqq 1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$=(2s)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)$

$+(3t)\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$



よって

$\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ とした時の

△$OA'B'$の内部(境界含む)

6．$\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$ が成り立つとき，以下の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$\therefore\ (2\sqrt{7})^2=9\cdot 2^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot 1^2$

$28=36+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度 θ を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$-1=2\cdot 1\cdot\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より

$\theta=120^\circ$

7．球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$ について，以下の問いに答えよ。

(1) この球面の中心の座標と半径を求めよ。

$x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$

$(x^2-2x)+y^2+(z^2+4z)-4=0$

$(x-1)^2-1+y^2+(z+2)^2-4-4=0$

$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$

$\therefore$ 中心 $(1, 0, -2)$，半径3

(2) この球面と xy 平面との交わりは円となる。その円の中心の座標と半径を求めよ。

xy 平面上の点は $z=0$ より

連立して

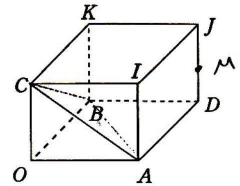
$(x-1)^2+y^2+(0+2)^2=9$

$(x-1)^2+y^2+4=9$

$\therefore\ (x-1)^2+y^2=5$

$\therefore$ 中心 $(1, 0, 0)$ 半径 $\sqrt{5}$

8．平行六面体 $OADB-CIJK$ において，辺 DJ の中点を M とし，直線 OM と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

O, P, Mは一直線なので

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}$

$=k\left(\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

$=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}$ …(*)

とおける。また，点Pは平面ABC上なので

(*)から

$k+k+\frac{1}{2}k=1$

$\therefore\ k=\frac{2}{5}$

よって $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$

(3) $OP:OM$ を簡単な整数比で表せ。

(2)より $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OM}$

よって $OP:OM=2:5$