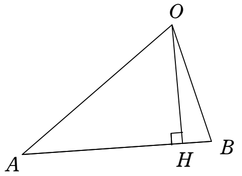
数学演習（ベクトル）Ｈ２１．２．９　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

１．平行四辺形 $ABCD$ において，辺 AB を $3:2$ に内分する点を E，対角線 BD を $2:5$ に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{EF}$ を $\vec{b}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) ３点 E , F , C は同一直線上にあることを示せ。

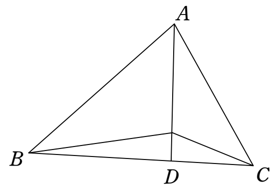
２．$OA=5$, $OB=4$, $\angle AOB=60°$ である△ OAB において，頂点 O から辺 AB に下した垂線の足を H とする。$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。



３．$\overrightarrow{OA}=(4, 0)$, $\overrightarrow{OB}=(3, 4)$ とするとき，$\angle AOB$ の二等分線が辺 AB と交わる点 C とする。$\overrightarrow{OC}$ の成分を求めよ。

４．△ ABC の内部に点 P があり，$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。直線 AP と辺 BC の交点を D とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。



(2) $BD:DC$, $AP:PD$ を簡単な整数比でそれぞれ求めよ。

(3) △ APC と △ PBD の面積比を求めよ。

５．１辺の長さが１の正四面体 $OABC$ において，辺 OA を $1:2$ に内分する点を P，辺 OB を $5:1$ に内分する点を Q，辺 OC の中点を R とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) △ PQR の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

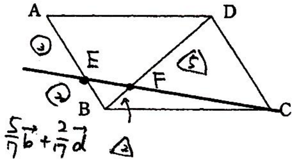
(2) 直線 OG と３点 A , B , C を通る平面との交点を D とする。$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{OD}|$ の値を求めよ。

第3回定期考査 −ベクトル− (各10点) H21.2.9

Class (　) No. (　) Name (こたえ.)

[1] 平行四辺形 $ABCD$ において、辺 AB を 3 : 2 に内分する点を E、対角線 BD を 2 : 5 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{EF}$ を $\vec{a}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\frac{2}{7}(-\vec{b}+\vec{d})=\frac{5}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{d}$

∴

$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{5}\vec{b}+\left(\frac{5}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{d}\right)=\frac{4}{35}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{d}$

(2) 3点 E, F, C は同一直線上にあることを示せ。

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}$

$=\frac{2}{5}\vec{b}+\vec{d}$

一方. (1) より

$\overrightarrow{EF}=\frac{4}{35}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{d}$

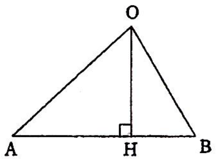
$=\frac{2}{7}\left(\frac{2}{5}\vec{b}+\vec{d}\right)=\frac{2}{7}\overrightarrow{EC}$

よって

$\overrightarrow{EC}=\frac{7}{2}\overrightarrow{EF}$ が成り立つので

E、F、C は一直線上にある.

[2] $OA=5$, $OB=4$, $\angle \cancel{OA}B=60^\circ$ (AOB) の $\triangle OAB$ において、O から AB に垂線を下ろしその足を H とする。$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。



Hは辺AB上より. $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AB}$ とおくと.

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}=t(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

∴ $\overrightarrow{OH}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

$OH\perp AB$ より

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$\Leftrightarrow \{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}\cdot(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=0$

$\Leftrightarrow -(1-t)|\overrightarrow{OA}|^2+(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2=0$

ここで $|\overrightarrow{OA}|=OA=5$, $|\overrightarrow{OB}|=OB=4$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60^\circ$

$=5\times4\times\frac{1}{2}=10$.

∴

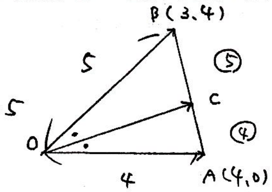
$-(1-t)\times5^2+(1-t)\times10-t\times10+t\times4^2=0$

$-25(1-t)+10(1-t)-10t+16t=0$

これを解いて $t=\frac{5}{7}$

∴ $\overrightarrow{OH}=\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{7}\overrightarrow{OB}$

[3] $\overrightarrow{OA}=(4,0)$, $\overrightarrow{OB}=(3,4)$ とするとき、$\angle AOB$ の2等分線が辺 AB と交わる点を C とする。$\overrightarrow{OC}$ の成分を求めよ。



$|\overrightarrow{OA}|=4$, $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ より.

$OA:OB=AC:CB$ から. $AC:CB=4:5$

よって

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

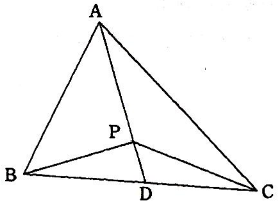
$=\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$\left(\frac{20}{9}+\frac{12}{9},\ 0+\frac{16}{9}\right)$

$=\frac{5}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}=\frac{5}{9}(4,0)+\frac{4}{9}(3,4)=\left(\frac{32}{9},\frac{16}{9}\right)$

[4] $\triangle ABC$ の内部に点 P があり、$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。直線 AP と辺 BC の交点を D とする。

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{PA}+2(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$6\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$-6\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

∴

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(2) $BD:DC$, $AP:PD$ を求めよ。(各5点)

$\overrightarrow{AD}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表す.

A, P, Dは一直線上より.

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}s\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}s\overrightarrow{AC}$ …①

B, D, Cは一直線上より

$\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$

∴ $\overrightarrow{AD}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ …②

①② より

$$\begin{cases}\frac{1}{3}s=1-t & (\overrightarrow{AB})\\ \frac{1}{2}s=t & (\overrightarrow{AC})\end{cases}$$

これを解いて $s=\frac{6}{5}$, $t=\frac{3}{5}$

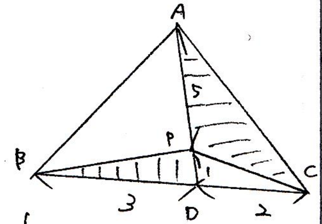
よって. $\overrightarrow{AD}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

より

$AP:PD=5:1$

$BD:DC=3:2$

(3) $\triangle APC$ と $\triangle PBD$ の面積比を求めよ。



△ABCの面積を S とする.

$BD:DC=3:2$ より

$\triangle ABD=\frac{3}{5}S$. $\triangle ACD=\frac{2}{5}S$

また $AP:PD=5:1$ より

$\triangle PBD=\frac{1}{6}\triangle ABD=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}S=\frac{1}{10}S$

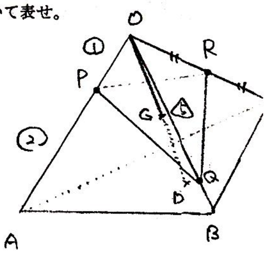
$\triangle APC=\frac{5}{6}\triangle ACD=\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}S=\frac{1}{3}S$

∴

$\triangle APC:\triangle PBD=\frac{1}{3}S:\frac{1}{10}S=\frac{1}{3}:\frac{1}{10}=10:3$

[5] 辺の長さが1の正四面体 $OABC$ において、辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P、辺 OB を 5 : 1 に内分する点を Q、辺 OC の中点を R とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

(1) $\triangle PQR$ の重心を G とするとき、$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

(2) OG と A, B, C を通る平面の交点を D とする。$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。また、$|\overrightarrow{OD}|$ を求めよ。

Dは平面ABCより

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

とおける.

よって.

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=s(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+t(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})$

$\overrightarrow{OD}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ …①

また. O, G, Dは一直線より

$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OG}$ とおくと

$\overrightarrow{OD}=k\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{9}k\vec{a}+\frac{5}{18}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}$ …②

①② より係数を比較して.

$$\begin{cases}\frac{1}{9}k=1-s-t,\\ \frac{5}{18}k=s\\ \frac{1}{6}k=t\end{cases}$$

これを解いて. $k=\frac{9}{5}$, $s=\frac{1}{2}$, $t=\frac{3}{10}$

よって

$\overrightarrow{OD}=\frac{9}{5}\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{10}\vec{c}$

また.

$|\overrightarrow{OD}|^2=\left|\frac{1}{10}(2\vec{a}+5\vec{b}+3\vec{c})\right|^2$

$=\frac{1}{100}|2\vec{a}+5\vec{b}+3\vec{c}|^2$

(OABCは長さ1の正四面体より $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$)

$=\frac{1}{100}(4|\vec{a}|^2+25|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+30\vec{b}\cdot\vec{c}+12\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\frac{1}{100}(4+25+9+10+15+6)=\frac{69}{100}$ ∴ $|\overrightarrow{OD}|=\frac{\sqrt{69}}{10}$