第３回定期考査（ベクトル）Ｈ２０．９．２６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

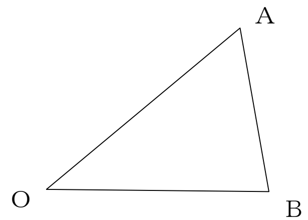
２．ベクトル $\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

３．3 点 A(2, 1, 2)，B(4, 3, 6)，C(4, 1, 4) について，

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値を求めよ。

(2) ∠BAC の大きさを求めよ。

４．△ＯＡＢにおいて，実数 s，t が $3s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たすとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ を満たす点Ｐはどんな図形上にあるか図示せよ。



５．△ABCにおいて，辺ＡＢを２：１に内分する点をＰとし，辺ＡＣの中点をＱとする。また，線分ＢＱの中点をＲとする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ３点Ｐ，Ｒ，Ｃは同一直線上にあることを示せ。

６．3 点 A(2, 3, 1)，B(3, −2, 2)，C(−2, 5, 3) がある。△ABC の重心を中心とする半径 3 の球面の方程式を求めよ。

7．△ABCにおいて，辺ABを3：1に内分する点をD，辺ACを2：3に内分する点をEとし，線分BEと線分CDの交点をPとする。

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

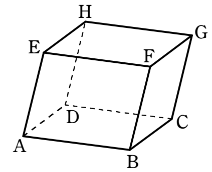
(2) 直線ＡＰと辺ＢＣの交点をＱとするとき，ＢＱ：ＱＣを簡単な整数比で求めよ。

8．△ＡＢＣにおいて，ＡＢ＝４，ＡＣ＝３，∠ＢＡＣ＝６０°である。点Ａから辺ＢＣに下ろした垂線と辺ＢＣとの交点をＰとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) BP:PC$=t:1-t$（t は実数）とおくとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, t を用いて表せ。

(2) BP:PC を簡単な整数比で表せ。

9．平行六面体 ABCD－EFGH がある。辺ＡＥの中点をＭ，線分ＡＧと△ＭＢＤの交点をＰとする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。



(1) $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ を用いて表せ。

1．$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$で，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角が30°であるとき，

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^\circ$$
$$=\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

5

(2) $|3\vec{a}-\vec{b}|$の値を求めよ。

$$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=9\cdot(\sqrt{3})^2-6\cdot 3+2^2$$
$$=27-18+4=13$$

5

$|3\vec{a}-\vec{b}|>0$より　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

2．ベクトル$\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$に垂直な単位ベクトルを求めよ。

$\vec{e}=(x,y)$とおくと，単位ベクトルより

$|\vec{e}|=1$　つまり　$\sqrt{x^2+y^2}=1$　より両辺

2乗して　$x^2+y^2=1$　……(i)

また　$\vec{a}\perp\vec{e}$　より

$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　∴ $\vec{a}\cdot\vec{e}=(-1)\times x+\sqrt{3}\times y=0$

……(ii)

よって(i)(ii)より　$x=\sqrt{3}y$ を(i)に代入して

$(\sqrt{3}y)^2+y^2=1$

∴ $y^2=\frac{1}{4}$ より　$y=\pm\frac{1}{2}$

10

以上より　$\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

3．3点A(2, 1, 2)，B(4, 3, 6)，C(4, 1, 4)について，

(1) 内積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$の値を求めよ。

$$\overrightarrow{AB}=(4-2,\ 3-1,\ 6-2)=(2,\ 2,\ 4)$$
$$\overrightarrow{AC}=(4-2,\ 1-1,\ 4-2)=(2,\ 0,\ 2)$$

5

∴

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 2+2\times 0+4\times 2=12$$

(2) ∠BACの大きさを求めよ。

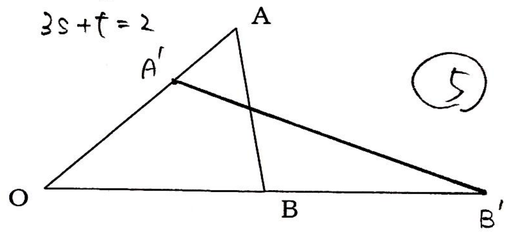
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

5

よって
$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{12}{2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ<\angle BAC<180^\circ$ より　$\angle BAC=30^\circ$

4．△ＯＡＢにおいて，実数s，tが$\cancel{2s+t\leqq 3}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$を満たすとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$を満たす点Ｐはどんな図形上にあるか図示せよ。



5

$3s+t=2$ より　$\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}t=1$

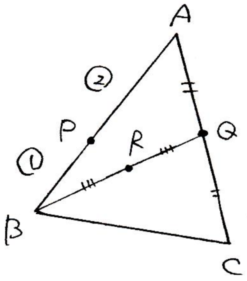
また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\left(\frac{3}{2}s\right)\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)+\left(\frac{1}{2}t\right)(2\overrightarrow{OB})$

と書けるので．$\overrightarrow{OA'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$ と A', B' を

定めた時，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ であるから，

点Pは線分A'B'上にある。

5．△ABCにおいて，辺ＡＢを２：１に内分する点をＰとし，辺ＡＣの中点をＱとする。また，線分ＢＱの中点をＲとする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$とする。



(1) $\overrightarrow{AR}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

よって

$$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AQ})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

5

(2) 3点Ｐ，Ｒ，Ｃは同一直線上にあることを示せ。

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{b}=-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\ \cdots\text{(i)}$$
$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}\ \cdots\text{(ii)}$$

よって(i)(ii)より　$\overrightarrow{PC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PR}$ が成りたつので

3点P，R，Cは同一直線上にある。

5

6．3点A(2, 3, 1)，B(3, −2, 2)，C(−2, 5, 3)がある。△ABCの重心を中心とする半径3の球面の方程式を求めよ。

△ABCの重心は

$$\left(\frac{2+3+(-2)}{3},\ \frac{3+(-2)+5}{3},\ \frac{1+2+3}{3}\right)$$

より　(1，2，2)

5

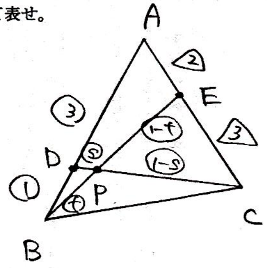
よって球面の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$$

/50

7．△ABCにおいて，辺ABを3：1に内分する点をD，辺ACを2：3に内分する点をEとし，線分BEと線分CDの交点をPとする。

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$DP:PC = s:1-s$ とおくと

$\overrightarrow{AP} = (1-s)\overrightarrow{AD} + s\overrightarrow{AC}$

$= (1-s)\frac{3}{4}\vec{b} + s\vec{c}$ (i)

$BP:PE = t:1-t$ とおくと

$\overrightarrow{AP} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AE}$

$= (1-t)\vec{b} + t\cdot\frac{2}{5}\vec{c}$ (ii)

(i)(ii)より係数を比較して

$\begin{cases} \frac{3}{4}(1-s) = 1-t & (\vec{b}\text{の係数}) \\ s = \frac{2}{5}t & (\vec{c}\text{の係数}) \end{cases}$

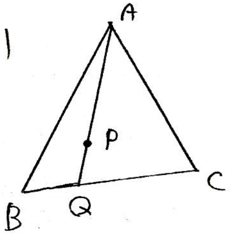
解いて $t = \frac{5}{14}$，$s = \frac{1}{7}$

よって

$\overrightarrow{AP} = \frac{9}{14}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$

10

(2) 直線APと辺BCの交点をQとするとき，BQ：QCを簡単な整数比で求めよ。



3点A，P，Qは一直線上より

$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP}$ とおける

∴(1)より

$\overrightarrow{AQ} = k\left(\frac{9}{14}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}\right)$

$= \frac{9}{14}k\vec{b} + \frac{1}{7}k\vec{c}$

また点Qは線分AB上にあるので

$\frac{9}{14}k + \frac{1}{7}k = 1$ より $k = \frac{14}{11}$

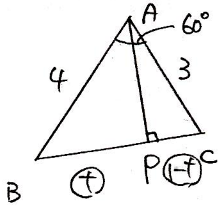
よって $\overrightarrow{AQ} = \frac{9}{11}\vec{b} + \frac{2}{11}\vec{c} = \frac{9\vec{b}+2\vec{c}}{2+9}$

であるから $BQ:QC = 2:9$

10

8．△ABCにおいて，AB＝4，AC＝3，∠BAC＝60°である。点Aから辺BCに下ろした垂線と辺BCとの交点をPとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $BP:PC=t:1-t$（tは実数）とおくとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，t を用いて表せ。



$\overrightarrow{AP} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$

5

(2) BP:PCを簡単な整数比で表せ。

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$ より $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

ここで

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC} = \{(1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\}\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= (1-t)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + t|\overrightarrow{AC}|^2$

$\quad - (1-t)|\overrightarrow{AB}|^2 - t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

この時，

$|\overrightarrow{AB}| = 4$，$|\overrightarrow{AC}| = 3$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ = 4\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 6$.

を上式に代入して

$(1-t)\times 6 + t\cdot 3^2 - (1-t)\cdot 4^2 - t\cdot 6 = 0$.

∴ $13t - 10 = 0$

∴ $t = \frac{10}{13}$

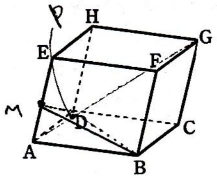
ゆえに(1)より

$BP:PC = \frac{10}{13} : \frac{3}{13} = 10:3$

10

9．平行六面体ABCD－EFGHがある。辺AEの中点をM，線分AGと△MBDの交点をPとする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。

(1) $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

$= \vec{b} + \vec{d} + \vec{e}$

5

(2) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ を用いて表せ。

点Pは線分AG上より

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AG} = k\vec{b} + k\vec{d} + k\vec{e}$ ⋯(i)

とおける。また，点Pは平面MBDより

$\overrightarrow{MP} = s\overrightarrow{MB} + t\overrightarrow{MD}$

なるsとtが存在する。よって

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$

$= \overrightarrow{AM} + s\overrightarrow{MB} + t\overrightarrow{MD}$

$= \overrightarrow{AM} + s(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + t(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM})$

$= (1-s-t)\overrightarrow{AM} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$

$= (1-s-t)\cdot\frac{1}{2}\vec{e} + s\vec{b} + t\vec{d}$ ⋯(ii)

(i)(ii)より係数を比較して

$\begin{cases} k = s & (\vec{b}\text{の係数}) \\ k = t & (\vec{d}\text{の係数}) \\ k = \frac{1}{2}(1-s-t) & (\vec{e}\text{の係数}) \end{cases}$

解いて $k = s = t = \frac{1}{4}$

∴

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d} + \frac{1}{4}\vec{e}$

10