数学演習（空間座標•球）Ｒ１．１２．１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．(1)　3 点 A$(3,\ 7,\ 0)$，B$(-3,\ 1,\ 3)$，G$(-7,\ -4,\ 6)$ について

（ア）　線分 AB を $2:1$ に内分する点 P の座標を求めよ。

（イ）　線分 AB を $2:3$ に外分する点 Q の座標を求めよ。

（ウ）　△PQR の重心が点 G となるような点 R の座標を求めよ。

(2)　点 A$(0,\ 1,\ 2)$ と点 B$(-1,\ 1,\ 6)$ を結ぶ線分 AB 上に点 C$(a,\ b,\ 3)$ がある。このとき，a，b の値を求めよ。

2．(1)　点 A$(2,\ -1,\ 3)$ を通る，次のような平面の方程式を，それぞれ求めよ。

（ア）　x 軸に垂直　　（イ）　y 軸に垂直　　（ウ）　z 軸に垂直

(2)　点 B$(1,\ 3,\ -2)$ を通る，次のような平面の方程式を，それぞれ求めよ。

（ア）　xy 平面に平行　　（イ）　yz 平面に平行　　（ウ）　zx 平面に平行

3．次の条件を満たす球面の方程式を求めよ。

(1)　2 点 A$(1,\ 2,\ 4)$，B$(-5,\ 8,\ -2)$ を直径の両端とする。

(2)　点 $(5,\ 1,\ 4)$ を通り，3 つの座標平面に接する。

4．4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(6,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ -8)$ を通る球面の方程式を求めよ。また，その中心の座標と半径を求めよ。

5．中心が点 $(1,\ -3,\ 2)$ で，原点を通る球面を S とする。

(1) S と yz 平面の交わりは円になる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) S と平面 $z=k$ の交わりが半径 $\sqrt{5}$ の円になるという。k の値を求めよ。

6．点 O を原点とする座標空間において，A $(5,\ 4,\ -2)$ とする。
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+36=0$ を満たす点 P $(x,\ y,\ z)$ の集合はどのような図形を表すか。また，その方程式を x，y，z を用いて表せ。

数学演習（空間座標•球）Ｒ１．１２．１　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　）

1．(1)　3 点 A (3，7，0)，B (−3，1，3)，G (−7，−4，6) について

（ア）　線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めよ。

（イ）　線分 AB を 2 : 3 に外分する点 Q の座標を求めよ。

（ウ）　△PQR の重心が点 G となるような点 R の座標を求めよ。

(2)　点 A (0，1，2) と点 B (−1，1，6) を結ぶ線分 AB 上に点 C (a，b，3) がある。このとき，a，b の値を求めよ。

解答　(1)（ア）P (−1，3，2)　（イ）Q (15，19，−6)　（ウ）R (−35，−34，22)

(2)　$a=-\frac{1}{4}$，$b=1$

解説

(1)（ア）$\left(\frac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{2+1},\ \frac{1\cdot7+2\cdot1}{2+1},\ \frac{1\cdot0+2\cdot3}{2+1}\right)$　ゆえに　P (−1，3，2)

（イ）$\left(\frac{3\cdot3-2\cdot(-3)}{-2+3},\ \frac{3\cdot7-2\cdot1}{-2+3},\ \frac{3\cdot0-2\cdot3}{-2+3}\right)$　ゆえに　Q (15，19，−6)

（ウ）R (a，b，c) とすると，△PQR の重心の座標は

$$\left(\frac{-1+15+a}{3},\ \frac{3+19+b}{3},\ \frac{2-6+c}{3}\right)$$

すなわち　$\left(\frac{a+14}{3},\ \frac{b+22}{3},\ \frac{c-4}{3}\right)$

これが点 G (−7，−4，6) と一致するから

$$\frac{a+14}{3}=-7,\ \frac{b+22}{3}=-4,\ \frac{c-4}{3}=6$$

よって　$a=-35$，$b=-34$，$c=22$

ゆえに　R (−35，−34，22)

(2)　線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点の座標は

$$((1-t)\cdot0+t\cdot(-1),\ (1-t)\cdot1+t\cdot1,\ (1-t)\cdot2+t\cdot6)$$

すなわち　$(-t,\ 1,\ 4t+2)$

これが点 C (a，b，3) に一致するとき

$$-t=a,\ 1=b,\ 4t+2=3$$

これを解いて　$t=\frac{1}{4}$，$a=-\frac{1}{4}$，$b=1$

別解　$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k $(0\leqq k\leqq1)$ があるから

$$(a,\ b-1,\ 1)=k(-1,\ 0,\ 4)$$

ゆえに　$a=-k$，$b-1=0$，$1=4k$

これを解いて　$k=\frac{1}{4}$，$a=-\frac{1}{4}$，$b=1$

2．(1)　点 A (2，−1，3) を通る，次のような平面の方程式を，それぞれ求めよ。

（ア）　x 軸に垂直　（イ）　y 軸に垂直　（ウ）　z 軸に垂直

(2)　点 B (1，3，−2) を通る，次のような平面の方程式を，それぞれ求めよ。

（ア）　xy 平面に平行　（イ）　yz 平面に平行　（ウ）　zx 平面に平行

解答　(1)（ア）$x=2$　（イ）$y=-1$　（ウ）$z=3$

(2)（ア）$z=-2$　（イ）$x=1$　（ウ）$y=3$

解説

(1)（ア）$x=2$　（イ）$y=-1$　（ウ）$z=3$

(2)　求める平面は点 B (1，3，−2) を通り，（ア）z 軸，（イ）x 軸，（ウ）y 軸 にそれぞれ垂直な平面であるから，その方程式は

（ア）$z=-2$　（イ）$x=1$　（ウ）$y=3$

3．次の条件を満たす球面の方程式を求めよ。

(1)　2 点 A (1，2，4)，B (−5，8，−2) を直径の両端とする。

(2)　点 (5，1，4) を通り，3 つの座標平面に接する。

解答　(1)　$(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27$

(2)　$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$ または $(x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2=49$

解説

(1)　この球面の中心 C は直径 AB の中点であるから

$$\mathrm{C}\left(\frac{1-5}{2},\ \frac{2+8}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \mathrm{C}(-2,\ 5,\ 1)$$

また，球面の半径を r とすると

$$r^2=\mathrm{AC}^2=(-2-1)^2+(5-2)^2+(1-4)^2=27$$

よって　$(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27$

(2)　球面が各座標平面に接し，かつ点 (5，1，4) を通ることから，半径を r とすると，中心の座標は (r，r，r) と表される。

ゆえに，球面の方程式は　$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

点 (5，1，4) を通るから　$(5-r)^2+(1-r)^2+(4-r)^2=r^2$

よって　$r^2-10r+21=0$　ゆえに　$(r-3)(r-7)=0$

したがって　$r=3$，7

よって　$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$ または $(x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2=49$

4．4 点 (0，0，0)，(6，0，0)，(0，4，0)，(0，0，−8) を通る球面の方程式を求めよ。また，その中心の座標と半径を求めよ。

解答　$x^2+y^2+z^2-6x-4y+8z=0$，中心の座標は (3，2，−4)，半径は $\sqrt{29}$

解説

求める方程式を $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ とすると，

点 (0，0，0) を通るから　$D=0$

点 (6，0，0) を通るから　$36+6A+D=0$

点 (0，4，0) を通るから　$16+4B+D=0$

点 (0，0，−8) を通るから　$64-8C+D=0$

これらを解いて　$A=-6$，$B=-4$，$C=8$，$D=0$

よって，求める方程式は

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y+8z=0$$

これを変形すると　$(x^2-6x+9)-9+(y^2-4y+4)-4+(z^2+8z+16)-16=0$

ゆえに　$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=29$

よって，この球面の

中心の座標は (3，2，−4)，半径は $\sqrt{29}$

5．中心が点 (1，−3，2) で，原点を通る球面を S とする。

(1)　S と yz 平面の交わりは円になる。この円の中心と半径を求めよ。

(2)　S と平面 $z=k$ の交わりが半径 $\sqrt{5}$ の円になるという。k の値を求めよ。

解答　(1)　中心 (0，−3，2)，半径 $\sqrt{13}$　　(2)　$k=-1$，5

解説

(1)　球面 S の半径 r は，中心 (1，−3，2) と原点との距離に等しいから

$$r^2=1^2+(-3)^2+2^2=14$$

したがって，球面 S の方程式は

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=14$$

球面 S が yz 平面と交わってできる図形の方程式は

$$(0-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=14,\quad x=0$$

よって　$(y+3)^2+(z-2)^2=13$，$x=0$

これは yz 平面上で中心 (0，−3，2)，半径 $\sqrt{13}$ の円を表す。

(2)　球面 S と平面 $z=k$ が交わってできる図形の方程式は

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(k-2)^2=14,\quad z=k$$

よって　$(x-1)^2+(y+3)^2=14-(k-2)^2$，$z=k$

これは平面 $z=k$ 上で，中心 (1，−3，k)，半径 $\sqrt{14-(k-2)^2}$ の円を表す。

よって，条件から　$14-(k-2)^2=(\sqrt{5})^2$　　ゆえに　$(k-2)^2=9$

よって　$k-2=\pm3$　　したがって　$k=-1$，5

6．点 O を原点とする座標空間において，A (5，4，−2) とする。

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+36=0$ を満たす点 P (x，y，z) の集合はどのような図形を表すか。

また，その方程式を x，y，z を用いて表せ。

解答　中心が A (5，4，−2)，半径が 3 の球面；方程式は $(x-5)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=9$

解説

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+36=0$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+36=0$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-36$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=5^2+4^2+(-2)^2=45$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=9$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$　すなわち　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3$

したがって，点 P の集合は中心が A (5，4，−2)，半径が 3 の球面を表す。

ゆえに，その方程式は

$$(x-5)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=9$$

別解　P (x，y，z) とすると　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=x^2+y^2+z^2$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=5x+4y-2z$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+36=0$ から

$$x^2+y^2+z^2-2(5x+4y-2z)+36=0$$

ゆえに　$x^2-2\times5x+5^2+y^2-2\times4y+4^2+z^2+2\times2z+2^2=-36+5^2+4^2+2^2$

変形して　$(x-5)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=9$

したがって，点 P の集合は中心が A(5，4，−2)，半径が 3 の球面を表す。