数学演習（空間図形への応用）Ｒ１．１１．３０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の4点が同じ平面上にあるように，x の値を定めよ。

$A(1,\ 1,\ 0)$，$B(3,\ 4,\ 5)$，$C(1,\ 3,\ 6)$，$P(4,\ 5,\ x)$

2．平行六面体 ABCD − EFGH において，辺 BF を 2 : 1 に内分する点を P，辺 FG を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 DH の中点を R とする。4 点 A，P，Q，R は同じ平面上にあることを示せ。

3．四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P とする。また辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q として，辺 OC を 3 : 1 に内分する点を R とする。更に三角形 ABC の重心を G とする。

3 点 P，Q，R を通る平面と直線 OG の交点を K とするとき，$\overrightarrow{OK}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

4．四面体 OABC において，線分 OA を 2 : 1 に内分する点を P，線分 OB を 3 : 1 に内分する点を Q，線分 BC を 4 : 1 に内分する点を R とする。この四面体を 3 点 P，Q，R を通る平面で切り，この平面が線分 AC と交わる点を S とするとき，線分の長さの比 AS : SC を求めよ。

5. 四面体 ABCD を考える。$\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ は正三角形であり，AC と BD とは垂直である。

(1) BC と AD も垂直であることを示せ。

(2) 四面体 ABCD は正四面体であることを示せ。

6. 空間において，3 点 A$(5,\ 0,\ 1)$，B$(4,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 5)$ を頂点とする三角形 ABC がある。原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とするとき，H の座標を求めよ。

7. 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$ を通る平面を α とし，原点 O から平面 α に下ろした垂線の足を H とする。次のものを求めよ。

(1) $\triangle ABC$ の面積

(2) 線分 OH の長さ

8．各辺の長さが 1 の正四面体 PABC において，A から 平面 PBC に下ろした垂線の足を H とし，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$ とする。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。　(2)　$\overrightarrow{PH}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　正四面体 PABC の体積を求めよ。

9．辺の長さが 1 である正四面体 ABCD がある。線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を E とし，線分 AC を $(1-t):t$ に内分する点を F とする $(0 \leqq t \leqq 1$，ただし $t=0$ のとき E＝A，F＝C，$t=1$ のとき E＝B，F＝A とする)。∠EDF を θ とするとき

(1)　$\cos\theta$ を t で表せ。　(2)　$\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

10．四面体 OABC は，OA＝4，OB＝5，OC＝3，∠AOB＝90°，∠AOC＝∠BOC＝60° を満たしている。

(1)　点 C から △OAB に下ろした垂線と △OAB との交点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{CH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ。

1．次の 4 点が同じ平面上にあるように，x の値を定めよ。

A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(3,\ 4,\ 5)$，C$(1,\ 3,\ 6)$，P$(4,\ 5,\ x)$

解答　$x=6$

解説

［解答 1］ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(3,\ 4,\ x)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 3,\ 5)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 2,\ 6)$

3 点 A，B，C は一直線上にないから，点 P が平面 ABC 上にあるための条件は，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t があることである。

よって　$(3,\ 4,\ x)=s(2,\ 3,\ 5)+t(0,\ 2,\ 6)$

すなわち　$(3,\ 4,\ x)=(2s,\ 3s+2t,\ 5s+6t)$

ゆえに　$2s=3$，$3s+2t=4$，$5s+6t=x$

よって　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=-\dfrac{1}{4}$　　したがって　$x=6$

［解答 2］ 3 点 A，B，C は一直線上にないから，原点を O とすると，点 P が平面 ABC 上にあるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$s+t+u=1$ となる実数 s，t，u があることである。

よって　$(4,\ 5,\ x)=s(1,\ 1,\ 0)+t(3,\ 4,\ 5)+u(1,\ 3,\ 6)$

すなわち　$(4,\ 5,\ x)=(s+3t+u,\ s+4t+3u,\ 5t+6u)$

ゆえに　$s+3t+u=4$，$s+4t+3u=5$，$5t+6u=x$

また　$s+t+u=1$

これらを解くと　$s=-\dfrac{1}{4}$，$t=\dfrac{3}{2}$，$u=-\dfrac{1}{4}$

したがって　$x=5\cdot\dfrac{3}{2}+6\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=6$

別解　3 点 A，B，C を通る平面の方程式を求めると　$2x-3y+z+1=0$

この平面上に点 P があるための条件は　$2\cdot4-3\cdot5+x+1=0$

よって　$x=6$

2．平行六面体 ABCD－EFGH において，辺 BF を 2 : 1 に内分する点を P，辺 FG を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 DH の中点を R とする。4 点 A，P，Q，R は同じ平面上にあることを示せ。

解答　略

解説

点 R が 3 点 A，P，Q の定める平面上にあるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ となる実数 s，t が存在することである。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FQ}}=\vec{a}+\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ とすると

$$\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=s\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)+t\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)$$

よって　$\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}=(s+t)\vec{a}+\dfrac{2}{3}t\vec{b}+\left(\dfrac{2}{3}s+t\right)\vec{c}$

4 点 A，B，D，E は同じ平面上にないから

$$0=s+t \quad \cdots\cdots①,\quad 1=\frac{2}{3}t \quad \cdots\cdots②,\quad \frac{1}{2}=\frac{2}{3}s+t \quad \cdots\cdots③$$

①，② から　$s=-\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{3}{2}$　　これは ③ を満たす。

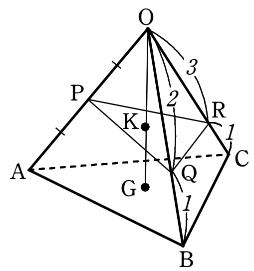
ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ となる実数 s，t が存在するから，4 点 A，P，Q，R は同じ平面上にある。

3．四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P とする。また辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q として，辺 OC を 3 : 1 に内分する点を R とする。更に三角形 ABC の重心を G とする。

3 点 P，Q，R を通る平面と直線 OG の交点を K とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{6}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{6}{29}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{6}{29}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

解説



点 K は 3 点 P，Q，R を通る平面上にあるから，実数 s，t，u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+u\overrightarrow{\mathrm{OR}},\quad s+t+u=1$$

と表される。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots①$$

また，点 K は直線 OG 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$（$k$ は実数）と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\right)$

$$=\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots②$$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，①，② より

$$\frac{s}{2}=\frac{k}{3},\quad \frac{2}{3}t=\frac{k}{3},\quad \frac{3}{4}u=\frac{k}{3}$$

ゆえに　$s=\dfrac{2}{3}k$，$t=\dfrac{k}{2}$，$u=\dfrac{4}{9}k$

これらを $s+t+u=1$ に代入して　$\dfrac{2}{3}k+\dfrac{k}{2}+\dfrac{4}{9}k=1$

よって　$k=\dfrac{18}{29}$

これを ② に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{6}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{6}{29}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{6}{29}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

別解　点 K は直線 OG 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$（$k$ は実数）と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\right)$

$$=\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots(※)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

点 K は 3 点 P，Q，R を通る平面上にあるから　$\dfrac{2}{3}k+\dfrac{k}{2}+\dfrac{4}{9}k=1$

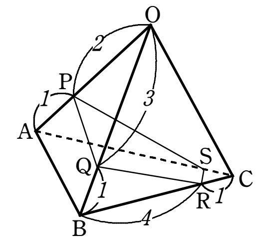
よって　$k=\dfrac{18}{29}$

ゆえに，(※) から　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{6}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{6}{29}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{6}{29}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

4．四面体 OABC において，線分 OA を 2 : 1 に内分する点を P，線分 OB を 3 : 1 に内分する点を Q，線分 BC を 4 : 1 に内分する点を R とする。この四面体を 3 点 P，Q，R を通る平面で切り，この平面が線分 AC と交わる点を S とするとき，線分の長さの比 AS : SC を求めよ。

解答　6 : 1

解説



AS : SC$=k:(1-k)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots①$$

また，点 S は 3 点 P，Q，R を通る平面上にあるから，実数 s，t，u を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+u\overrightarrow{\mathrm{OR}},\quad s+t+u=1$$

と表される。ここで，BR : RC$=4:1$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4+1}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{3}{4}t+\frac{u}{5}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{5}u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots②$$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，①，② より

$$1-k=\frac{2}{3}s,\quad 0=\frac{3}{4}t+\frac{u}{5},\quad k=\frac{4}{5}u$$

ゆえに　$s=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}k$，$t=-\dfrac{k}{3}$，$u=\dfrac{5}{4}k$

これらを $s+t+u=1$ に代入して　$\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}k-\dfrac{k}{3}+\dfrac{5}{4}k=1$

よって　$k=\dfrac{6}{7}$

したがって　AS : SC$=\dfrac{6}{7}:\left(1-\dfrac{6}{7}\right)=6:1$

5．四面体 ABCD を考える。△ABC と △ABD は正三角形であり，AC と BD とは垂直である。

(1)　BC と AD も垂直であることを示せ。

(2)　四面体 ABCD は正四面体であることを示せ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。

(1) △ABC と △ABD は正三角形であるから

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}$ …… ①

AC⊥BD から　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

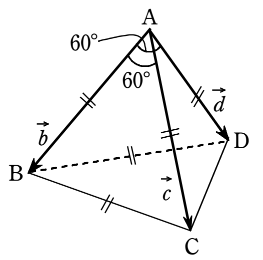
よって　$\vec{c}\cdot(\vec{d}-\vec{b})=0$

ゆえに　$\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ …… ②

①, ② より, $\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}$ であるから

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{d}=0$

$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AD}\neq\vec{0}$ であるから　BC⊥AD



(2) $|\overrightarrow{CD}|^2=|\vec{d}-\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$=|\vec{d}|^2-2|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°+|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$

よって　CD=AC

ゆえに, 四面体 ABCD のすべての辺の長さは等しいから, 四面体 ABCD は正四面体である。

6. 空間において, 3 点 A(5, 0, 1), B(4, 2, 0), C(0, 1, 5) を頂点とする三角形 ABC がある。原点 O(0, 0, 0) から平面 ABC に垂線を下ろし, 平面 ABC との交点を H とするとき, H の座標を求めよ。

解答　(2, 2, 2)

解説

$\overrightarrow{AB}=(-1, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC}=(-5, 1, 4)$

点 H は平面 ABC 上にあるから, $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ (s, t は実数) とおける。

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}$

$=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

$=(5, 0, 1)+s(-1, 2, -1)+t(-5, 1, 4)$

$=(5-s-5t, 2s+t, 1-s+4t)$ …… ①

OH⊥(平面 ABC) であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ から　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$-(5-s-5t)+2(2s+t)-(1-s+4t)=0$

ゆえに　$2s+t=2$ …… ②

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ から　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

よって　$-5(5-s-5t)+1\cdot(2s+t)+4(1-s+4t)=0$

ゆえに　$s+14t=7$ …… ③

②, ③ を解いて　$s=\dfrac{7}{9}$, $t=\dfrac{4}{9}$

よって, ① から　H(2, 2, 2)

7. 3 点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3) を通る平面を α とし, 原点 O から平面 α に下ろした垂線の足を H とする。次のものを求めよ。

(1) △ABC の面積　　(2) 線分 OH の長さ

解答　(1) $\dfrac{7}{2}$　(2) $OH=\dfrac{6}{7}$

解説

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1, 0, 3)$

よって　$|\overrightarrow{AB}|^2=(-1)^2+2^2=5$,

$|\overrightarrow{AC}|^2=(-1)^2+3^2=10$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-1)+2\times0+0\times3=1$

ゆえに　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\times10-1^2}=\dfrac{7}{2}$

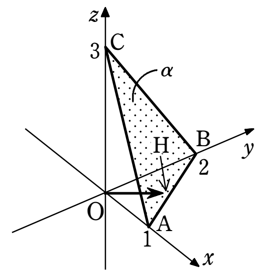
(2) 四面体 OABC の体積を V とすると

$V=\dfrac{1}{3}\triangle OAB\times OC=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times2\times3=1$

また, $V=\dfrac{1}{3}\triangle ABC\times OH$ であるから, (1) より

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{2}\times OH=1$

よって　$OH=\dfrac{6}{7}$



8. 各辺の長さが 1 の正四面体 PABC において, A から 平面 PBC に下ろした垂線の足を H とし, $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{PC}=\vec{c}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。　(2) $\overrightarrow{PH}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 正四面体 PABC の体積を求めよ。

解答　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$　(2) $\overrightarrow{PH}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$　(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle APB=1\times1\times\cos60°=\dfrac{1}{2}$

同様にして　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$

(2) 平面 PBC において, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ であるから, s, t を実数として, $\overrightarrow{PH}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表される。

ゆえに　$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{PH}-\overrightarrow{PA}=s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a}$

AH⊥(平面 PBC) であるから

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{PC}$

よって　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PB}=0$, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PC}=0$

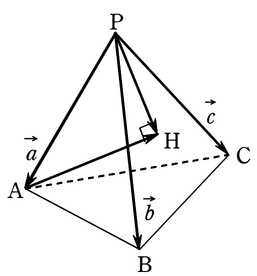
ここで　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PB}=(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{b}$

$=-\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=-\dfrac{1}{2}+s+\dfrac{1}{2}t$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PC}=(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{c}+s\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2$

$=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}s+t$



ゆえに　$2s+t-1=0$, $s+2t-1=0$　これを解いて　$s=t=\dfrac{1}{3}$

よって　$\overrightarrow{PH}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(3) 三平方の定理により

$|\overrightarrow{AH}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PH}|^2=1^2-\left|\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})\right|^2$

$=1-\dfrac{1}{9}(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)$

$=1-\dfrac{1}{9}\left(1^2+2\times\dfrac{1}{2}+1^2\right)=\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　また　$\triangle PBC=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

したがって, 求める体積は

$\dfrac{1}{3}\times\triangle PBC\times|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

9. 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD がある。線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を E とし, 線分 AC を $(1-t):t$ に内分する点を F とする ($0\leqq t\leqq1$, ただし $t=0$ のとき E=A, F=C, $t=1$ のとき E=B, F=A とする)。∠EDF を θ とするとき

(1) $\cos\theta$ を t で表せ。　(2) $\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　(1) $\cos\theta=\dfrac{-t^2+t+1}{2(t^2-t+1)}$　(2) 最大値 $\dfrac{5}{6}$, 最小値 $\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}$ であるから

$|\overrightarrow{DE}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2$

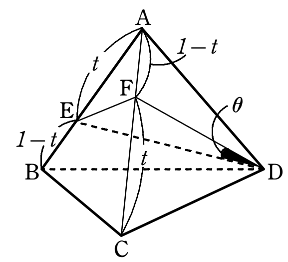
$=t^2-2\times t\times1\times\cos60°+1^2$

$=t^2-t+1$

$|\overrightarrow{DF}|^2=|\overrightarrow{AF}|^2-2\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2$

$=(1-t)^2-2(1-t)\times1\times\cos60°+1^2$

$=t^2-t+1$



$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}+|\overrightarrow{AD}|^2$

$=t(1-t)\cos60°-t\times1\times\cos60°-1\times(1-t)\cos60°+1^2$

$=\dfrac{-t^2+t+1}{2}$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DF}|}=\dfrac{-t^2+t+1}{2(t^2-t+1)}$

別解　$DE^2=t^2+1-2t\cos60°=t^2-t+1$

$DF^2=t^2+1-2t\cos60°=t^2-t+1$

$EF^2=t^2+(1-t)^2-2t(1-t)\cos60°=3t^2-3t+1$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{DE^2+DF^2-EF^2}{2DE\times DF}=\dfrac{-t^2+t+1}{2(t^2-t+1)}$

(2) (1) から　$\cos\theta=\dfrac{-t^2+t+1}{2(t^2-t+1)}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-(t^2-t+1)+2}{t^2-t+1}$

$=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{2}{t^2-t+1}\right)$

ここで, $f(t)=t^2-t+1$ とすると　$f(t)=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

$0\leqq t\leqq1$ のとき, $\dfrac{3}{4}\leqq f(t)\leqq1$ であり　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left\{-1+\dfrac{2}{f(t)}\right\}$

よって, $f(t)$ が最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとるとき $\cos\theta$ は最大値 $\dfrac{1}{2}\left(-1+2\times\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{5}{6}$ をとり,

$f(t)$ が最大値 1 をとるとき $\cos\theta$ は最小値 $\dfrac{1}{2}(-1+2)=\dfrac{1}{2}$ をとる。

10. 四面体 OABC は, OA=4, OB=5, OC=3, ∠AOB=90°, ∠AOC=∠BOC=60° を満たしている。

(1) 点 C から △OAB に下ろした垂線と △OAB との交点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{CH}$ を

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。

解答 (1) $\overrightarrow{CH}=\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{10}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ (2) $5\sqrt{2}$

解説

(1) $\angle AOB=90^\circ$ から $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

また $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=5\cdot3\cos60^\circ=\frac{15}{2}$, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=3\cdot4\cos60^\circ=6$

点 H は平面 OAB 上にあるから，$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (s, t は実数) と表される。

よって $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CH}$ は平面 OAB に垂直であるから $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$

ゆえに，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$, $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ であるから

$$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ (s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

よって $s\cdot4^2+t\cdot0-6=0$, $s\cdot0+t\cdot5^2-\frac{15}{2}=0$

すなわち $16s-6=0$, $25t-\frac{15}{2}=0$

これを解いて $s=\frac{3}{8}$, $t=\frac{3}{10}$

したがって $\overrightarrow{CH}=\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{10}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

(2) $\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5=10$

また
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CH}|^2&=\left|\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{10}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=\frac{9}{64}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{9}{100}|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2\\&\quad+\frac{9}{40}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=\frac{9}{64}\cdot16+\frac{9}{100}\cdot25+9+0-\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{2}-\frac{3}{4}\cdot6\\&=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+9-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{CH}|>0$ であるから $|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

よって，四面体 OABC の体積は $\frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot CH=\frac{1}{3}\cdot10\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$