数学演習（空間ベクトルの位置ベクトル）Ｒ１．１１．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1．四面体 OABC がある。線分 AB を 2 : 3 に内分する点を P，線分 OP を 10 : 1 に外分する点を Q とし，△QBC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ で表せ。

2．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 OA，OB の中点をそれぞれ P，Q とし，辺 OC を 2 : 3 に内分する点を R とする。また，△PQR の重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OG}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{OG}\right|$ を求めよ。

3．四面体 ABCD において，△BCD，△ACD，△ABD，△ABC の重心をそれぞれ G_A，G_B，G_C，G_D とする。線分 AG_A，BG_B，CG_C，DG_D をそれぞれ 3 : 1 に内分する点は一致することを示せ。

4．四面体 ABCD に関し，次の等式を満たす点 P はどのような位置にある点か。

$$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}+6\overrightarrow{DP}=\vec{0}$$

5．1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-A′B′C′D′において，辺 AB，CC′，D′A′ を $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{y}$，$\overrightarrow{AA'}=\vec{z}$ とする。ただし，$0<a<1$ とする。

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ を用いて表せ。

(2)　$|\overrightarrow{PQ}|:|\overrightarrow{PR}|$ を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を求めよ。

6．(1)　四面体 OABC がある。$0<t<1$ を満たす t に対し，辺 OB，OC，AB，AC を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ K，L，M，N とする。このとき，四角形 KLNM は平行四辺形であることを示せ。

(2)　座標空間において，3 点 $(-1,\ 10,\ -3)$，$(2,\ {}^{ア}\boxed{},\ 3)$，$(3,\ 6,\ {}^{イ}\boxed{})$ は一直線上にある。

7. 平行六面体 ABCD-EFGH において，辺 AB，AD を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ P，Q とし，平行四辺形 EFGH の対角線 EG を 1 : 2 に内分する点を R とするとき，平行六面体の対角線 AG は △PQR の重心 K を通ることを証明せよ。

8. (1) 2 点 A $(-3,\ -1,\ 1)$，B $(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線 ℓ に点 C $(2,\ 3,\ 3)$ から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(2) 2 点 A $(-1,\ 2,\ 3)$，B $(0,\ 1,\ 2)$ を通る直線を ℓ とする。点 P は直線 ℓ 上を動き，点 Q は y 軸上を動くものとする。このとき，2 点 P，Q 間の距離の最小値と，そのときの 2 点 P，Q の座標を求めよ。

9. 四面体 OABC の辺 OA の中点を P，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R，辺 AB を 1 : 6 に内分する点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(3) 直線 PQ と直線 RS は交わり，その交点を T とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

1．四面体 OABC がある。線分 AB を 2 : 3 に内分する点を P，線分 OP を 10 : 1 に外分する点を Q とし，△QBC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{13}{27}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

解説

点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分するから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

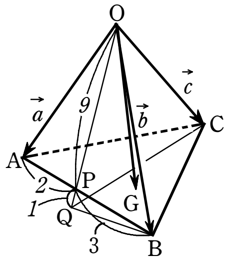
点 Q は線分 OP を 10 : 1 に外分するから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{10}{9}\overrightarrow{OP}=\frac{10}{9}\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$$

点 G は △QBC の重心であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{13}{27}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$



2．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 OA，OB の中点をそれぞれ P，Q とし，辺 OC を 2 : 3 に内分する点を R とする。また，△PQR の重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OG}$ の大きさ $|\overrightarrow{OG}|$ を求めよ。

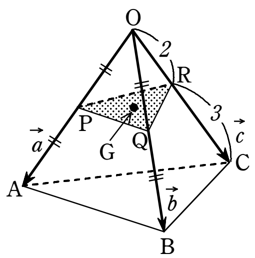
解答　(1) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{15}\vec{c}$　(2) $\frac{\sqrt{131}}{30}$

解説

(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}}{2}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{b}}{2}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$$

$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{15}\vec{c}$$



(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

よって　$|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{30^2}(5\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c})\cdot(5\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c})$

$$=\frac{1}{30^2}(25|\vec{a}|^2+25|\vec{b}|^2+16|\vec{c}|^2+50\vec{a}\cdot\vec{b}+40\vec{b}\cdot\vec{c}+40\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{1}{30^2}\left(25+25+16+50\times\frac{1}{2}+40\times\frac{1}{2}+40\times\frac{1}{2}\right)=\frac{131}{30^2}$$

ゆえに　$|\overrightarrow{OG}|=\frac{\sqrt{131}}{30}$

3．四面体 ABCD において，△BCD，△ACD，△ABD，△ABC の重心をそれぞれ G_A，G_B，G_C，G_D とする。線分 AG_A，BG_B，CG_C，DG_D をそれぞれ 3 : 1 に内分する点は一致することを示せ。

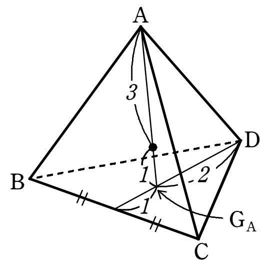
解答　略

解説

点 A，B，C，D，G_A，G_B，G_C，G_D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{g_A}$，$\vec{g_B}$，$\vec{g_C}$，$\vec{g_D}$ とすると

$$\vec{g_A}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3},\quad \vec{g_B}=\frac{\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}}{3},$$

$$\vec{g_C}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}}{3},\quad \vec{g_D}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



よって，線分 AG_A，BG_B，CG_C，DG_D を 3 : 1 に内分する点の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$ とすると

$$\vec{p}=\frac{1\cdot\vec{a}+3\vec{g_A}}{3+1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4},\quad \vec{q}=\frac{1\cdot\vec{b}+3\vec{g_B}}{3+1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4},$$

$$\vec{r}=\frac{1\cdot\vec{c}+3\vec{g_C}}{3+1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4},\quad \vec{s}=\frac{1\cdot\vec{d}+3\vec{g_D}}{3+1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

ゆえに　$\vec{p}=\vec{q}=\vec{r}=\vec{s}$

よって，線分 AG_A，BG_B，CG_C，DG_D をそれぞれ 3 : 1 に内分する点は一致する。

4．四面体 ABCD に関し，次の等式を満たす点 P はどのような位置にある点か。

$$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}+6\overrightarrow{DP}=\vec{0}$$

解答　線分 BC を 2 : 3 に内分する点を E，線分 ED を 6 : 5 に内分する点を F とすると，点 P は線分 AF を 11 : 1 に内分する位置

解説

点 A に関する位置ベクトルを B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$，P$(\vec{p})$ とすると，等式から

$$\vec{p}+3(\vec{p}-\vec{b})+2(\vec{p}-\vec{c})+6(\vec{p}-\vec{d})=\vec{0}$$

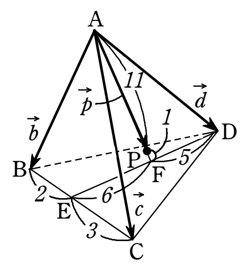
よって　$\vec{p}=\frac{3\vec{b}+2\vec{c}+6\vec{d}}{12}=\frac{1}{12}\left(5\cdot\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{5}+6\vec{d}\right)$

ここで，$\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{5}=\vec{e}$ とすると

$$\vec{p}=\frac{1}{12}(5\vec{e}+6\vec{d})=\frac{11}{12}\cdot\frac{5\vec{e}+6\vec{d}}{11}$$

更に，$\frac{5\vec{e}+6\vec{d}}{11}=\vec{f}$ とすると

$$\vec{p}=\frac{11}{12}\vec{f}$$



したがって，線分 BC を 2 : 3 に内分する点を E，線分 ED を 6 : 5 に内分する点を F とすると，点 P は線分 AF を 11 : 1 に内分する位置にある。

5．1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-A′B′C′D′において，辺 AB，CC′，D′A′ を $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{y}$，$\overrightarrow{AA'}=\vec{z}$ とする。ただし，$0<a<1$ とする。

(1) $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ を用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{PQ}|:|\overrightarrow{PR}|$ を求めよ。

(3) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を求めよ。

解答　(1) $\overrightarrow{PQ}=(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}$，$\overrightarrow{PR}=-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$　(2) 1 : 1　(3) 60°

解説

(1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=(1-a)\overrightarrow{AC}+a\overrightarrow{AC'}-a\overrightarrow{AB}$

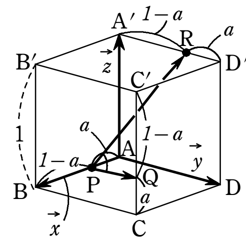
$$=(1-a)(\vec{x}+\vec{y})+a(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})-a\vec{x}$$

$$=(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}$$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=(1-a)\overrightarrow{AD'}+a\overrightarrow{AA'}-a\overrightarrow{AB}$

$$=(1-a)(\vec{y}+\vec{z})+a\vec{z}-a\vec{x}$$

$$=-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$$



(2) $|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|=1$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{z}=\vec{z}\cdot\vec{x}=0$ であるから

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\{(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}\}\cdot\{(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}\}$$

$$=(1-a)^2+1^2+a^2=2a^2-2a+2$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2=\{-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}\}\cdot\{-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}\}$$

$$=a^2+(1-a)^2+1^2=2a^2-2a+2$$

ゆえに　$|\overrightarrow{PQ}|^2:|\overrightarrow{PR}|^2=1:1$　　よって　$|\overrightarrow{PQ}|:|\overrightarrow{PR}|=1:1$

(3) (2) から　$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{2(a^2-a+1)}$

また　$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\{(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}\}\cdot\{-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}\}$

$$=(1-a)\times(-a)+1\times(1-a)+a\times1=a^2-a+1$$

よって，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\frac{a^2-a+1}{\{\sqrt{2(a^2-a+1)}\}^2}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

6．(1) 四面体 OABC がある。$0<t<1$ を満たす t に対し，辺 OB，OC，AB，AC を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ K，L，M，N とする。このとき，四角形 KLNM は平行四辺形であることを示せ。

(2) 座標空間において，3 点 $(-1,\ 10,\ -3)$，$(2,\ \boxed{ア},\ 3)$，$(3,\ 6,\ \boxed{イ})$ は一直線上にある。

解答　(1) 略　(2) (ア) 7　(イ) 5

解説

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると

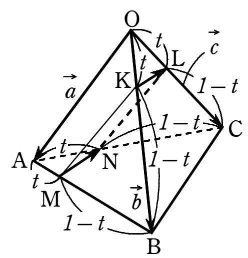
$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}=t\vec{c}-t\vec{b}=t(\vec{c}-\vec{b})$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}-\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}$$

$$=t(\vec{c}-\vec{b})$$

よって　$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{MN}$

ゆえに，四角形 KLNM は平行四辺形である。



(2) A$(-1,\ 10,\ -3)$，B$(2,\ y,\ 3)$，C$(3,\ 6,\ z)$ とする。

3 点 A，B，C が一直線上にあるための条件は，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k があることである。

$$\overrightarrow{AC}=(3+1,\ 6-10,\ z+3)=(4,\ -4,\ z+3),$$

$$\overrightarrow{AB}=(2+1,\ y-10,\ 3+3)=(3,\ y-10,\ 6)$$

よって　$(4,\ -4,\ z+3)=k(3,\ y-10,\ 6)$

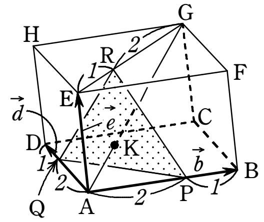
ゆえに　$4=3k$ …… ①，$-4=(y-10)k$ …… ②，$z+3=6k$ …… ③

① から　$k=\dfrac{4}{3}$　　②，③ から　$y={}^{ア}7$，$z={}^{イ}5$

7．平行六面体 ABCD-EFGH において，辺 AB，AD を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ P，Q とし，平行四辺形 EFGH の対角線 EG を 1 : 2 に内分する点を R とするとき，平行六面体の対角線 AG は △PQR の重心 K を通ることを証明せよ。

解答　略

解説



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{b},\ \overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\vec{d}$$

また，$\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$ …… ① から

$$\overrightarrow{AR}=\frac{2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+3\vec{e}}{3}$$

ゆえに，△PQR の重心 K について

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}+\frac{\vec{b}+\vec{d}+3\vec{e}}{3}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}\quad\cdots\cdots ②$$

①，② から　$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AK}$

したがって，対角線 AG は △PQR の重心 K を通る。

8．(1)　2 点 A$(-3,\ -1,\ 1)$，B$(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線 ℓ に点 C$(2,\ 3,\ 3)$ から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(2)　2 点 A$(-1,\ 2,\ 3)$，B$(0,\ 1,\ 2)$ を通る直線を ℓ とする。点 P は直線 ℓ 上を動き，点 Q は y 軸上を動くものとする。このとき，2 点 P，Q 間の距離の最小値と，そのときの 2 点 P，Q の座標を求めよ。

解答　(1)　$(1,\ 1,\ -1)$　　(2)　P$(1,\ 0,\ 1)$，Q$(0,\ 0,\ 0)$ のとき，最小値は　$\sqrt{2}$

解説

(1)　点 H は直線 AB 上にあるから，$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

よって　
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}&=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{AB}\\&=(-5,\ -4,\ -2)+k(2,\ 1,\ -1)\\&=(2k-5,\ k-4,\ -k-2)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CH}$ より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$ であるから

$2(2k-5)+(k-4)-(-k-2)=0$　　ゆえに　$k=2$

このとき　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=(1,\ 1,\ -1)$

したがって，H の座標は　$(1,\ 1,\ -1)$

(2)　点 P は直線 AB 上の点であるから，$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

Q$(0,\ y,\ 0)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}-k\overrightarrow{AB}=(1,\ y-2,\ -3)-k(1,\ -1,\ -1)\\&=(1-k,\ y-2+k,\ -3+k)\end{aligned}$$

よって　
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2&=(1-k)^2+(y-2+k)^2+(-3+k)^2\\&=(y-2+k)^2+2k^2-8k+10\\&=(y-2+k)^2+2(k-2)^2+2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{PQ}|^2$ は $y-2+k=0$ かつ $k-2=0$ のとき，すなわち $k=2$，$y=0$ のとき最小となる。

このとき　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}=(1,\ 0,\ 1)$

$|\overrightarrow{PQ}|\geqq 0$ であるから，$|\overrightarrow{PQ}|^2$ が最小となるとき $|\overrightarrow{PQ}|$ も最小となる。

ゆえに，P$(1,\ 0,\ 1)$，Q$(0,\ 0,\ 0)$ のとき，2 点 P，Q 間の距離の最小値は　$\sqrt{2}$

9．四面体 OABC の辺 OA の中点を P，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R，辺 AB を 1 : 6 に内分する点を S とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき

(1)　$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

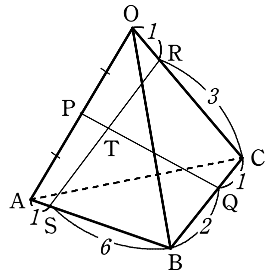
(2)　$\overrightarrow{RS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(3)　直線 PQ と直線 RS は交わり，その交点を T とするとき，$\overrightarrow{OT}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

解答　(1)　$\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$　　(2)　$\overrightarrow{RS}=\dfrac{6}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{b}-\dfrac{1}{4}\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{OT}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{15}\vec{b}+\dfrac{2}{15}\vec{c}$

解説



(1)　
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1\cdot\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}-\frac{1}{2}\vec{a}\\&=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

(2)　
$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS}&=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=\frac{6\vec{a}+1\cdot\vec{b}}{1+6}-\frac{1}{4}\vec{c}\\&=\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

(3)　直線 PQ と直線 RS の交点を T とする。

T は直線 PQ 上にあるから　$\overrightarrow{PT}=u\overrightarrow{PQ}$　(u は実数)

よって，(1) から

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OP}+u\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(1-u)\vec{a}+\frac{1}{3}u\vec{b}+\frac{2}{3}u\vec{c}\quad\cdots\cdots ①$$

T は直線 RS 上にあるから　$\overrightarrow{RT}=v\overrightarrow{RS}$　(v は実数)

ゆえに，(2) から

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OR}+v\overrightarrow{RS}=\frac{6}{7}v\vec{a}+\frac{1}{7}v\vec{b}+\frac{1}{4}(1-v)\vec{c}\quad\cdots\cdots ②$$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，①，② より

$$\frac{1}{2}(1-u)=\frac{6}{7}v,\ \frac{1}{3}u=\frac{1}{7}v,\ \frac{2}{3}u=\frac{1}{4}(1-v)$$

第 1 式と第 2 式から　$u=\dfrac{1}{5}$，$v=\dfrac{7}{15}$　　これは第 3 式を満たす。

よって，① から　$\overrightarrow{OT}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{15}\vec{b}+\dfrac{2}{15}\vec{c}$