数学演習（空間ベクトルの内積）Ｒ１．１１．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　辺 BC 上に $\mathrm{BD}=\dfrac{1}{3}$ となるように点 D をとる。このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を求めよ。

2．(1)　次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積とそのなす角 θ を，それぞれ求めよ。

(ア)　$\vec{a}=(-2,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 0)$　　(イ)　$\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ \sqrt{6},\ -1)$

(2)　3 点 A (1，0，0)，B (0，3，0)，C (0，0，2) で定まる △ABC の面積 S を求めよ。

3．2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 3)$ と $\vec{b}=(1,\ -1,\ 0)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

4．(1)　四面体 OABC において，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が垂直ならば

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

であることを証明せよ。

(2)　$\vec{a}=(3,\ -4,\ 12)$，$\vec{b}=(-3,\ 0,\ 4)$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ について，$\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{c}$ と $\vec{b}$ のなす角が等しくなるような実数 t の値を求めよ。

5．空間において，大きさが 4 で，x 軸の正の向きとなす角が 60°，z 軸の正の向きとなす角が 45° であるようなベクトル $\vec{p}$ を求めよ。また，$\vec{p}$ が y 軸の正の向きとなす角 θ を求めよ。

6．O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 2,\ -3)$，B$(3,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a}+t\vec{d}$ と $\vec{d}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

7．O を原点とする座標空間内において，定点 A$(1,\ 1,\ -1)$，動点 P$(-2t+2,\ 2t-1,\ -2)$ がある。$\angle$AOP の大きさが最小となるときの t の値を求めよ。

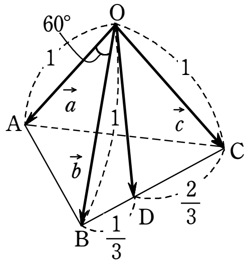
1．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　辺 BC 上に $BD=\dfrac{1}{3}$ となるように点 D をとる。このとき，内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$ を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\dfrac{1}{2}$

解説



(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\dfrac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\vec{a}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}(2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ であるから

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\left(2\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

2．(1)　次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積とそのなす角 θ を，それぞれ求めよ。

(ア)　$\vec{a}=(-2,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 0)$　　(イ)　$\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ \sqrt{6},\ -1)$

(2)　3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ で定まる △ABC の面積 S を求めよ。

解答　(1)　(ア)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$\theta=45^\circ$　　(イ)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{6}$，$\theta=120^\circ$　　(2)　$S=\dfrac{7}{2}$

解説

(1)　(ア)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\times(-1)+1\times1+2\times0=3$

また　$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$

(イ)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+(-1)\times\sqrt{6}+1\times(-1)=-\sqrt{6}$

また　$\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{6})^2+(-1)^2}}=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

(2)　$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 2)$ であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$

よって，$\angle BAC=\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とすると

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{50}}$

ゆえに　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{50}}\right)^2}=\dfrac{7}{\sqrt{50}}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{5}\times\dfrac{7}{\sqrt{50}}=\dfrac{7}{2}$

別解　$|\overrightarrow{AB}|^2=10$，$|\overrightarrow{AC}|^2=5$，$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2=1$ であるから

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10\times5-1}=\dfrac{7}{2}$

3．2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 3)$ と $\vec{b}=(1,\ -1,\ 0)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

解答　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

解説

求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$，$\vec{b}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$

よって　$2x+y+3z=0$ …… ①，$x-y=0$ …… ②

また，$|\vec{e}|=1$ であるから　$x^2+y^2+z^2=1$ …… ③

② から　$y=x$　　更に ① から　$z=-x$

これらを ③ に代入して　$x^2+x^2+(-x)^2=1$

ゆえに　$3x^2=1$　　よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このとき　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$z=\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$（複号同順）

したがって，求める単位ベクトルは

$\vec{e}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4．(1)　四面体 OABC において，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ が垂直ならば

$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2$

であることを証明せよ。

(2)　$\vec{a}=(3,\ -4,\ 12)$，$\vec{b}=(-3,\ 0,\ 4)$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ について，$\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{c}$ と $\vec{b}$ のなす角が等しくなるような実数 t の値を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$t=\dfrac{13}{5}$

解説

(1)　$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$ であるから　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

このとき　$(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2)-(|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2)$

$=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2$

$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2$

$=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

ゆえに　$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2$

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は $\vec{0}$ ではないから，$\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{c}$ と $\vec{b}$ のなす角が等しくなるための条件は

$\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|}=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{c}||\vec{b}|}$

よって　$|\vec{b}|(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{a}=|\vec{a}|(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}$

ゆえに　$|\vec{a}|^2|\vec{b}|+t|\vec{b}|\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{a}||\vec{b}|^2$

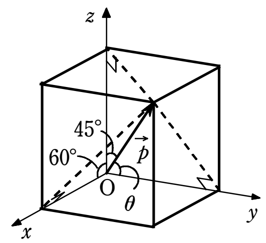
よって　$t|\vec{b}|(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}||\vec{b}|)=|\vec{a}|(\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}||\vec{b}|)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}||\vec{b}|\neq0$ であるから　$t=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\dfrac{\sqrt{9+16+144}}{\sqrt{9+0+16}}=\dfrac{\sqrt{169}}{\sqrt{25}}=\dfrac{13}{5}$

5．空間において，大きさが 4 で，x 軸の正の向きとなす角が 60°，z 軸の正の向きとなす角が 45° であるようなベクトル $\vec{p}$ を求めよ。また，$\vec{p}$ が y 軸の正の向きとなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{p}=(2,\ 2,\ 2\sqrt{2})$，$\theta=60^\circ$　または　$\vec{p}=(2,\ -2,\ 2\sqrt{2})$，$\theta=120^\circ$

解説



$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$，

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とすると

$\vec{p}\cdot\vec{e_1}=x$，$\vec{p}\cdot\vec{e_3}=z$

また　$\vec{p}\cdot\vec{e_1}=|\vec{p}||\vec{e_1}|\cos60^\circ=4\times1\times\dfrac{1}{2}=2$

$\vec{p}\cdot\vec{e_3}=|\vec{p}||\vec{e_3}|\cos45^\circ=4\times1\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

よって　$x=2$，$z=2\sqrt{2}$

このとき　$|\vec{p}|^2=2^2+y^2+(2\sqrt{2})^2=y^2+12$

$|\vec{p}|^2=16$ であるから　$y^2=4$　　ゆえに　$y=\pm2$

ここで　$\cos\theta=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{e_2}}{|\vec{p}||\vec{e_2}|}=\dfrac{y}{4\times1}=\dfrac{y}{4}$

ゆえに，$y=2$ のとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ であるから　　$\theta=60^\circ$

$y=-2$ のとき，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ であるから　　$\theta=120^\circ$

したがって　$\vec{p}=(2,\ 2,\ 2\sqrt{2})$，$\theta=60^\circ$　または

$\vec{p}=(2,\ -2,\ 2\sqrt{2})$，$\theta=120^\circ$

6．O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 2,\ -3)$，B$(3,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a}+t\vec{d}$ と $\vec{d}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

解答　$t=\dfrac{9}{14}$

解説

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(1,\ 2,\ -3)$，$\vec{d}=\overrightarrow{AB}=(2,\ -1,\ 3)$ であるから

$\vec{a}+t\vec{d}=(1+2t,\ 2-t,\ -3+3t)$

$\vec{a}+t\vec{d}\neq\vec{0}$ であるから，$(\vec{a}+t\vec{d})\perp\vec{d}$ となるための条件は　$(\vec{a}+t\vec{d})\cdot\vec{d}=0$

よって　$(1+2t)\times2+(2-t)\times(-1)+(-3+3t)\times3=0$

整理すると　$14t=9$　　ゆえに　$t=\dfrac{9}{14}$

別解　$(\vec{a}+t\vec{d})\cdot\vec{d}=0$ から　$\vec{a}\cdot\vec{d}+t|\vec{d}|^2=0$

ここで　$\vec{a}\cdot\vec{d}=-9$，$|\vec{d}|^2=14$　　よって　$-9+14t=0$

ゆえに　$t=\dfrac{9}{14}$　　このとき　$\vec{a}+t\vec{d}\neq\vec{0}$

7．O を原点とする座標空間内において，定点 A$(1,\ 1,\ -1)$，動点 P $(-2t+2,\ 2t-1,\ -2)$ がある。∠AOP の大きさが最小となるときの t の値を求めよ。

解答　$t=\dfrac{3}{4}$

解説

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$,

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(-2t+2)^2+(2t-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{8t^2-12t+9}$,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=1\times(-2t+2)+1\times(2t-1)-1\times(-2)=3$

よって　　$\cos\angle AOP=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8t^2-12t+9}}$

ここで，$0°\leqq\angle AOP\leqq 180°$ であるから，$\cos\angle AOP$ が最大となるとき，∠AOP の大きさは最小となる。

$f(t)=8t^2-12t+9$ とすると

$$f(t)=8\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-8\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+9=8\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{2}$$

$t=\dfrac{3}{4}$ のとき $f(t)$ は最小となり，$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{f(t)}}$ は最大となる。

ゆえに，∠AOP の大きさが最小となる t の値は　　$t=\dfrac{3}{4}$