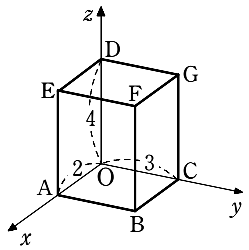
1．右図の直方体 OABC-DEFG について，次の点の座標を求めよ。



(1)　点 F から xy 平面に下ろした垂線の足 B

(2)　点 F と yz 平面に関して対称な点 P

(3)　点 P と y 軸に関して対称な点 Q

2．(1)　2 点 A $(-1,\ 0,\ 1)$，B $(1,\ -1,\ 3)$ 間の距離を求めよ。

(2)　3 点 A $(2,\ 3,\ 4)$，B $(4,\ 0,\ 3)$，C $(5,\ 3,\ 1)$ を頂点とする △ABC はどのような形か。

3．(1)　2 点 A $(-1,\ 2,\ -4)$，B $(5,\ -3,\ 1)$ から等距離にある x 軸上の点 P，y 軸上の点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　原点 O と 3 点 A $(2,\ 2,\ 4)$，B $(-1,\ 1,\ 2)$，C $(4,\ 1,\ 1)$ から等距離にある点 M の座標を求めよ。

4．平行六面体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2)　対角線 AG，BH の中点をそれぞれ P，Q とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ であることを示せ。

5．$\vec{a}=(-2,\ 0,\ 1)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 0)$，$\vec{c}=(2,\ 1,\ 1)$ とし，s，t，u は実数とする。

(1)　$3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2)　$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0}$ ならば $s=t=u=0$ であることを示せ。

(3)　$\vec{p}=(2,\ -7,\ 5)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

6．4 点 A $(1,\ 0,\ -3)$，B $(-1,\ 2,\ 2)$，D $(2,\ 3,\ -1)$，E $(6,\ a,\ b)$ がある。

(1)　AB∥DE であるとき，a，b の値を求めよ。また，このとき　AB : DE = $\boxed{}$

(2)　四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，点 C の座標を求めよ。

7．平行四辺形の 3 頂点が A (1，1，-2)，B (-2，1，2)，C (3，-1，-3) であるとき，第 4 の頂点 D の座標を求めよ。

8．(1)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ -1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるときの実数 t の値と，そのときの大きさを求めよ。

(2)　定点 A (2，0，3)，B (1，2，1) と，xy 平面上を動く点 P に対し，AP＋PB の最小値を求めよ。

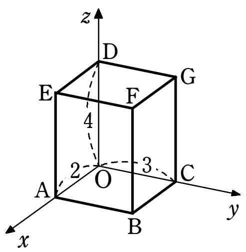
9．4 点 A (1，-2，-3)，B (2，1，1)，C (-1，-3，2)，D (3，-4，-1) がある。線分 AB，AC，AD を 3 辺とする平行六面体の他の頂点の座標を求めよ。

10．空間内に 3 点 A (1，-1，1)，B (-1，2，2)，C (2，-1，-1) がある。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (x，y は実数) の大きさの最小値を求めよ。

数学演習（空間座標）Ｒ１．１１．２７　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．右図の直方体OABC-DEFGについて，次の点の座標を求めよ。

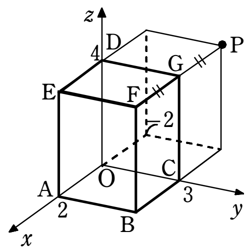
(1)　点Fから xy 平面に下ろした垂線の足B
(2)　点Fと yz 平面に関して対称な点P
(3)　点Pと y 軸に関して対称な点Q

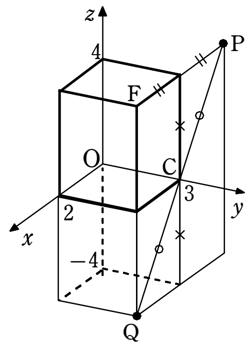


解答　(1)　B(2, 3, 0)　　(2)　P(−2, 3, 4)　　(3)　Q(2, 3, −4)

解説

(1)　B(2, 3, 0)
(2)　図から　P(−2, 3, 4)　　　　(3)　図から　Q(2, 3, −4)





2．(1)　2点A(−1, 0, 1)，B(1, −1, 3)間の距離を求めよ。
(2)　3点A(2, 3, 4)，B(4, 0, 3)，C(5, 3, 1)を頂点とする△ABCはどのような形か。

解答　(1)　3　　(2)　AB＝BCの二等辺三角形

解説

(1)　$AB=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(-1-0)^2+(3-1)^2}=3$
(2)　$AB^2=(4-2)^2+(0-3)^2+(3-4)^2=4+9+1=14$
$BC^2=(5-4)^2+(3-0)^2+(1-3)^2=1+9+4=14$
$CA^2=(2-5)^2+(3-3)^2+(4-1)^2=9+0+9=18$
よって　$AB^2=BC^2$　　ゆえに　AB＝BC
したがって，△ABCはAB＝BCの二等辺三角形である。

3．(1)　2点A(−1, 2, −4)，B(5, −3, 1)から等距離にある x 軸上の点P，y 軸上の点Qの座標をそれぞれ求めよ。
(2)　原点Oと3点A(2, 2, 4)，B(−1, 1, 2)，C(4, 1, 1)から等距離にある点Mの座標を求めよ。

解答　(1)　$P\left(\frac{7}{6},\ 0,\ 0\right)$，$Q\left(0,\ -\frac{7}{5},\ 0\right)$　　(2)　$M\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

解説

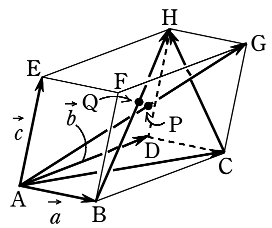
(1)　P(x, 0, 0)とすると，AP＝BPから　$AP^2=BP^2$
よって　$(x+1)^2+(0-2)^2+(0+4)^2=(x-5)^2+(0+3)^2+(0-1)^2$
これを解いて　$x=\frac{7}{6}$　　ゆえに　$P\left(\frac{7}{6},\ 0,\ 0\right)$
また，Q(0, y, 0)とすると，AQ＝BQから　$AQ^2=BQ^2$
よって　$(0+1)^2+(y-2)^2+(0+4)^2=(0-5)^2+(y+3)^2+(0-1)^2$
これを解いて　$y=-\frac{7}{5}$　　ゆえに　$Q\left(0,\ -\frac{7}{5},\ 0\right)$
(2)　M(x, y, z)とすると，OM＝AM＝BM＝CMから
$OM^2=AM^2=BM^2=CM^2$
$OM^2=AM^2$ から　$x^2+y^2+z^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z-4)^2$
$OM^2=BM^2$ から　$x^2+y^2+z^2=(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$
$OM^2=CM^2$ から　$x^2+y^2+z^2=(x-4)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$
よって　$x+y+2z=6$，$-x+y+2z=3$，$4x+y+z=9$
これを解くと　$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{3}{2}$，$z=\frac{3}{2}$　　したがって　$M\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

4．平行六面体ABCD-EFGHにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。
(1)　$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$，$\overrightarrow{CH}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。
(2)　対角線AG，BHの中点をそれぞれP，Qとすると，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}$ であることを示せ。

解答　(1)　$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{BH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{CH}=-\vec{a}+\vec{c}$　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$
$=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+\vec{c}$



(2)　(1)から　$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$
$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$
よって　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}$

5．$\vec{a}=(-2,\ 0,\ 1)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 0)$，$\vec{c}=(2,\ 1,\ 1)$ とし，s，t，u は実数とする。
(1)　$3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。
(2)　$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0}$ ならば $s=t=u=0$ であることを示せ。
(3)　$\vec{p}=(2,\ -7,\ 5)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

解答　(1)　順に (−8, 7, 2)，$3\sqrt{13}$　　(2)　略　　(3)　$\vec{p}=2\vec{a}-5\vec{b}+3\vec{c}$

解説

(1)　$3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}=3(-2,\ 0,\ 1)+4(0,\ 2,\ 0)-(2,\ 1,\ 1)$
$=(-6-2,\ 8-1,\ 3-1)=(-8,\ 7,\ 2)$
よって　$|3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{(-8)^2+7^2+2^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$
(2)　$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s(-2,\ 0,\ 1)+t(0,\ 2,\ 0)+u(2,\ 1,\ 1)=(-2s+2u,\ 2t+u,\ s+u)$
$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0}$ ならば
$-2s+2u=0$ ……①，$2t+u=0$ ……②，$s+u=0$ ……③
①，③から　$s=u=0$　　②から　$t=0$
したがって　$s=t=u=0$
(3)　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とすると
$-2s+2u=2$ ……④，$2t+u=-7$ ……⑤，$s+u=5$ ……⑥
④，⑥から　$s=2$，$u=3$　　⑤から　$t=-5$
したがって　$\vec{p}=2\vec{a}-5\vec{b}+3\vec{c}$

6．4点A(1, 0, −3)，B(−1, 2, 2)，D(2, 3, −1)，E(6, a, b)がある。
(1)　AB∥DEであるとき，a，b の値を求めよ。また，このとき　AB : DE＝□
(2)　四角形ABCDが平行四辺形であるとき，点Cの座標を求めよ。

解答　(1)　$a=-1$，$b=-11$，1 : 2　　(2)　C(0, 5, 4)

解説

(1)　AB∥DEであるから，$\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。
$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 2,\ 5)$，$\overrightarrow{DE}=(4,\ a-3,\ b+1)$ であるから
$(4,\ a-3,\ b+1)=k(-2,\ 2,\ 5)$
よって　$4=-2k$，$a-3=2k$，$b+1=5k$
ゆえに　$k=-2$，$a=-1$，$b=-11$
また，$|\overrightarrow{DE}|=|-2\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{AB}|$ から　AB : DE＝1 : 2
(2)　点Cの座標を(x, y, z)とする。
四角形ABCDは平行四辺形であるから　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{DC}=(x-2,\ y-3,\ z+1)$ であるから
$(-2,\ 2,\ 5)=(x-2,\ y-3,\ z+1)$
よって　$-2=x-2$，$2=y-3$，$5=z+1$
ゆえに　$x=0$，$y=5$，$z=4$
よって　C(0, 5, 4)

別解　四角形ABCDは平行四辺形であるから　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
よって　$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 2,\ 5)+(1,\ 3,\ 2)=(-1,\ 5,\ 7)$
ゆえに，原点をOとすると
$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=(1,\ 0,\ -3)+(-1,\ 5,\ 7)$
$=(0,\ 5,\ 4)$
よって　C(0, 5, 4)

7．平行四辺形の3頂点がA(1, 1, −2)，B(−2, 1, 2)，C(3, −1, −3)であるとき，第4の頂点Dの座標を求めよ。

解答　(6, −1, −7)，(0, −1, 1)，(−4, 3, 3)

解説

D(x, y, z)とする。
[1]　四角形ABCDが平行四辺形の場合　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{AB}=(-3,\ 0,\ 4)$，$\overrightarrow{DC}=(3-x,\ -1-y,\ -3-z)$ であるから

$-3=3-x,\ 0=-1-y,\ 4=-3-z$

これを解くと　　$x=6,\ y=-1,\ z=-7$

[2]　四角形 ABDC が平行四辺形の場合　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 0,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(x-3,\ y+1,\ z+3)$ であるから

$-3=x-3,\ 0=y+1,\ 4=z+3$

これを解くと　　$x=0,\ y=-1,\ z=1$

[3]　四角形 ADBC が平行四辺形の場合　　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ -2,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(-2-x,\ 1-y,\ 2-z)$ であるから

$2=-2-x,\ -2=1-y,\ -1=2-z$

これを解くと　　$x=-4,\ y=3,\ z=3$

以上から，点 D の座標は　　$(6,\ -1,\ -7)$，$(0,\ -1,\ 1)$，$(-4,\ 3,\ 3)$

別解　平行四辺形は，2 本の対角線がそれぞれの中点で交わることを利用する。

[1]　四角形 ABCD が平行四辺形の場合

対角線 AC の中点の座標は　　$\left(2,\ 0,\ -\dfrac{5}{2}\right)$

対角線 BD の中点の座標は　　$\left(\dfrac{x-2}{2},\ \dfrac{y+1}{2},\ \dfrac{z+2}{2}\right)$

これらが一致するから　　$\dfrac{x-2}{2}=2,\ \dfrac{y+1}{2}=0,\ \dfrac{z+2}{2}=-\dfrac{5}{2}$

よって　　$x=6,\ y=-1,\ z=-7$

[2]　対角線が AD，BC，[3]　対角線が AB，CD の場合も同様 (解答は省略)。

8．(1)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ -1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるときの実数 t の値と，そのときの大きさを求めよ。

(2)　定点 A $(2,\ 0,\ 3)$，B $(1,\ 2,\ 1)$ と，xy 平面上を動く点 P に対し，AP＋PB の最小値を求めよ。

解答　(1)　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\sqrt{21}$

解説

(1)　$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)+t(1,\ 2,\ -1)=(2+t,\ 1+2t,\ 1-t)$

ゆえに　　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2+t)^2+(1+2t)^2+(1-t)^2=6t^2+6t+6=6\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小となり，$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから $|\vec{a}+t\vec{b}|$ もこのとき最小になる。

したがって　　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

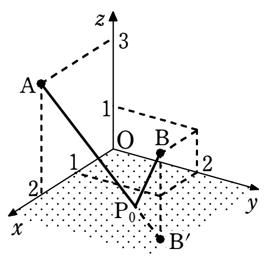
(2)　xy 平面に関して A と B は同じ側にある。

そこで，xy 平面に関して点 B と対称な点を B′ とすると B′$(1,\ 2,\ -1)$ であり，PB＝PB′ であるから

AP＋PB＝AP＋PB′≧AB′

よって，P として直線 AB′ と xy 平面の交点 $\mathrm{P_0}$ をとると AP＋PB は最小となり，最小値は

$\mathrm{AB'}=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{21}$

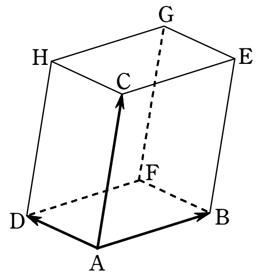


9．4 点 A $(1,\ -2,\ -3)$，B $(2,\ 1,\ 1)$，C $(-1,\ -3,\ 2)$，D $(3,\ -4,\ -1)$ がある。線分 AB，AC，AD を 3 辺とする平行六面体の他の頂点の座標を求めよ。

解答　$(0,\ 0,\ 6)$，$(4,\ -1,\ 3)$，$(2,\ -2,\ 8)$，$(1,\ -5,\ 4)$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 3,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -1,\ 5)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(2,\ -2,\ 2)$ であり，線分 AB，AC，AD を 3 辺とする平行六面体を，右の図のように ABFD−CEGH とすると，原点を O として



$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=(1+1-2,\ -2+3-1,\ -3+4+5)$

$=(0,\ 0,\ 6)$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(4,\ -1,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(2,\ -2,\ 8)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ -5,\ 4)$

よって，他の頂点の座標は

$(0,\ 0,\ 6)$，$(4,\ -1,\ 3)$，$(2,\ -2,\ 8)$，$(1,\ -5,\ 4)$

10．空間内に 3 点 A $(1,\ -1,\ 1)$，B $(-1,\ 2,\ 2)$，C $(2,\ -1,\ -1)$ がある。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (x，y は実数) の大きさの最小値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{4}{9}$，$y=\dfrac{5}{9}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 3,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 0,\ -2)$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ -1,\ 1)+x(-2,\ 3,\ 1)+y(1,\ 0,\ -2)$

$=(1-2x+y,\ -1+3x,\ 1+x-2y)$

よって　　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

$=(1-2x+y)^2+(-1+3x)^2+(1+x-2y)^2$

$=(1+4x^2+y^2-4x-4xy+2y)+(1-6x+9x^2)+(1+x^2+4y^2+2x-4xy-4y)$

$=14x^2-8xy+5y^2-8x-2y+3$

$=14x^2-8(y+1)x+5y^2-2y+3$

$=14\left\{x-\dfrac{2}{7}(y+1)\right\}^2-14\cdot\dfrac{4}{49}(y+1)^2+5y^2-2y+3$

$=14\left\{x-\dfrac{2}{7}(y+1)\right\}^2+\dfrac{27}{7}y^2-\dfrac{30}{7}y+\dfrac{13}{7}$

$=14\left\{x-\dfrac{2}{7}(y+1)\right\}^2+\dfrac{27}{7}\left(y-\dfrac{5}{9}\right)^2+\dfrac{2}{3}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさは，$x=\dfrac{2}{7}(y+1)$ かつ $y=\dfrac{5}{9}$，すなわち $x=\dfrac{4}{9}$，$y=\dfrac{5}{9}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。