数学演習（空間ベクトル）Ｈ２１．５．１２　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．四面体 $OABC$ において，辺 OA の中点を M，辺 BC を $3:2$ に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と 平面 ABC の交点を P する。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

２．四面体 $OABC$ において，辺 AB の中点を D，線分 CD を $3:4$ に内分する点を E，線分 OE を $2:1$ に内分する点を F とし，直線 AF と平面 OBC の交点を G とする。このとき，$AF:FG$ を簡単な整数比で表せ。

３．３点 O , $A(1,2,3)$, $B(1,-2,1)$ を通る平面に垂直で，大きさが２であるベクトルを求めよ。

４．３点 $A(1,2,0)$, $B(3,4,4)$, $C(5,4,6)$ を頂点とする△ABC の面積を求めよ。

5．3点 $A(1,-2,3)$, $B(-1,2,3)$, $C(1,2,-3)$ が定める平面 α に原点 O から垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

6．点 $(3,0,-2)$ を通り，平面 $\alpha : 4x+y-3z+2=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

7．直線 $x-1=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$ と平面 $2x-2y+z=6$ の交点の座標を求めよ。

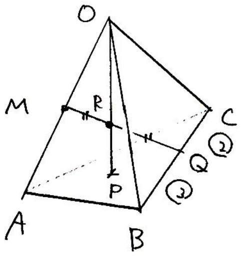
8．$\vec{a}=(1,4,-1)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(1,2,3)$ とする。ベクトル $\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}$ の大きさを最小にする実数 x, y の値とそのときの最小値を求めよ。

9．球面 $x^2+y^2+z^2-12x-14y-16z-20=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) この球面の中心の座標と半径を求めよ。

(2) この球面と，xy 平面が交わってできる円の中心の座標と半径を求めよ。

１．四面体 $OABC$ において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 3：2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と 平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。



$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{3+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{c}$$

O.R.Pは同一直線上より

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR}$$
$$= \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{5}k\vec{b} + \frac{3}{10}k\vec{c}$$

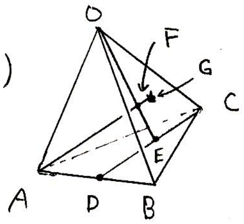
とおける．また，Pは平面ABC上より

$$\frac{1}{4}k + \frac{1}{5}k + \frac{3}{10}k = 1$$
$$\therefore \quad k = \frac{4}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{15}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

２．四面体 $OABC$ において，辺 AB の中点を D，線分 CD を 3：4 に内分する点を E，線分 OE を 2：1 に内分する点を F とし，直線 AF と平面 OBC の交点を G とする。このとき，$AF:FG$ を簡単な整数比で表せ。



$$\overrightarrow{OE} = \frac{4\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OD}}{3+4} \quad (\text{EはCDを}3:4)$$
$$= \frac{4}{7}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OD}$$
$$= \frac{4}{7}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$
$$= \frac{3}{14}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{14}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OC}$$

よって，OF：FE = 2：1 より

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OE}$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{14}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{14}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OC}\right)$$
$$= \frac{1}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{OB} + \frac{8}{21}\overrightarrow{OC}$$

ここで，A.F.Gは一直線上より

$\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AF}$ とおけるので

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$$
$$= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AF} = \left(1-\frac{6}{7}k\right)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{7}k\overrightarrow{OB} + \frac{8}{21}k\overrightarrow{OC}$$

ここでGは平面OBC上より

$\overrightarrow{OG} = s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$

とおけるので

係数を比較して

$$1-\frac{6}{7}k = 0$$
$$\therefore \quad k = \frac{7}{6}$$

よって

$$\overrightarrow{AG} = \frac{7}{6}\overrightarrow{AF}$$

より

AF：FG = 6：1

３．3点 O, $A(1,2,3)$, $B(1,-2,1)$ を通る平面に垂直で、大きさが2であるベクトルを求めよ。

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (1,2,3),$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (1,-2,1)$$

とする時．求めるベクトルは

$\vec{a}, \vec{b}$ に垂直で大きさが2

$\therefore$ $\vec{e} = (x, y, z)$ とおくと

$$\vec{a}\cdot\vec{e} = x+2y+3z = 0 \quad \cdots①$$
$$\vec{b}\cdot\vec{e} = x-2y+z = 0 \quad \cdots②$$
$$|\vec{e}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2 \quad \cdots③$$

①②より

$$x = -2z, \quad y = -\frac{1}{2}z$$

③より

$$x^2+y^2+z^2 = 4$$

代入して

$$(-2z)^2 + \left(\frac{1}{2}z\right)^2 + z^2 = 4$$
$$\frac{21}{4}z^2 = 4 \qquad \therefore\ z^2 = \frac{16}{21} \text{ より } \quad z = \pm\frac{4}{\sqrt{21}}$$

よって $\vec{e} = \left(\mp\frac{8}{\sqrt{21}}, \mp\frac{2}{\sqrt{21}}, \pm\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$

（複号同順）

外積より

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2x + 3y - 2z - 2z - y + 6x$$
$$= 8x + 2y - 4z$$
$$= (8, 2, -4) = \vec{n}$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{8^2+2^2+(-4)^2}$$
$$= \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

よって求めるベクトルは

$$\pm\frac{2}{2\sqrt{21}}\vec{n}$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{21}}(8, 2, -4)$$

４．3点 $A(1,2,0)$, $B(3,4,4)$, $C(5,4,6)$ を頂点とする$\triangle ABC$ の面積を求めよ。

$$\overrightarrow{AB} = (3-1,\ 4-2,\ 4-0)$$
$$= (2, 2, 4)$$
$$\overrightarrow{AC} = (5-1,\ 4-2,\ 6-0)$$
$$= (4, 2, 6)$$

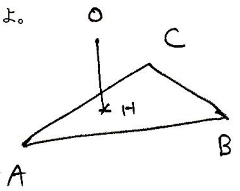
より

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 2^2+2^2+4^2 = 4+4+16 = 24$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2 = 4^2+2^2+6^2 = 16+4+36 = 56$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot4+2\cdot2+4\cdot6 = 8+4+24 = 36$$

$\therefore$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{24\cdot56 - (36)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1344 - 1296}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{48}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}$$
$$= 2\sqrt{3}$$

5．3点 $A(1, -2, 3)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(1, 2, -3)$ が定める平面 α に原点 O から垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。



Hは平面ABC より

$\vec{OH} = r\vec{OA} + s\vec{OB} + t\vec{OC}$ ①

$(r+s+t=1)$

とおける。よって

$\vec{OH} = r(1,-2,3) + s(-1,2,3) + t(1,2,-3)$ …(*)

$= (r-s+t,\ -2r+2s+2t,\ 3r+3s-3t)$

また，$\vec{AB} = (-1-1, 2+2, 3-3) = (-2, 4, 0)$ より

$\vec{OH} \perp \vec{AB}$ から．

$(r-s+t, -2r+2s+2t, 3r+3s-3t)\cdot(-2, 4, 0)$

$\vec{OH}\cdot\vec{AB} = (r-s+t, -2r+2s+2t) = 0$

$= -2(r-s+t) + 4(-2r+2s+2t)$

$\therefore\ -5r + 5s + 3t = 0$ …②

そして，$\vec{OH}\cdot\vec{AC}$ も同様で，

$\vec{OH}\cdot\vec{AC} = -13r - 5s + 13t = 0$ …③

②，③より

$$\begin{array}{r} -5r+5s+3t=0 \\ -13r-5s+13t=0 \\ \hline -18r \qquad +16t=0 \end{array} \ (+$$

$\therefore\ t = \frac{9}{8}r$

②に代入して

$s = \frac{13}{40}r$

$\therefore$ ①より

$r + \frac{9}{8}r + \frac{13}{40}r = 1$ $\therefore\ r = \frac{20}{49}$

$t = \frac{45}{98}$，$s = \frac{13}{98}$

(*)より

$H\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$ //

また

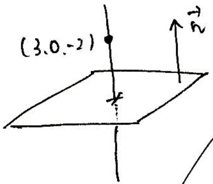
$OH^2 = \sqrt{\left(\frac{36}{49}\right)^2 + \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2}$

$= \frac{6}{7}$ //

6．点 $(3, 0, -2)$ を通り，平面 α：$4x+y-3z+2=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

平面 α は，ベクトル $\vec{n} = (4, 1, -3)$ に垂直である。

よって求める直線は $\vec{n}$ に平行なので，



求める直線の方程式は

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-(-2)}{-3}$$

$$\therefore\ \frac{x-3}{4} = y = \frac{z+2}{-3}$$ //

7．直線 $x-1 = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1}$ と平面 $2x-2y+z=6$ の交点の座標を求めよ。

$x-1 = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1} = k$ とおくと

$$\begin{cases} x = k+1 \\ y = -4k+1 \\ z = -k-3 \end{cases}$$

これを平面の式に代入して，

$2(k+1) - 2(-4k+1) + (-k+3) = 6$

$\therefore\ 7k + 3 = 0$ $\therefore\ k = \frac{3}{7}$

よって

$\left(\frac{10}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{24}{7}\right)$ //

8．$\vec{a} = (1, 4, -1)$，$\vec{b} = (0, 1, 1)$，$\vec{c} = (1, 2, 3)$ とする。ベクトル $\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}$ の大きさを最小にする実数 x，y の値とそのときの最小値を求めよ。

$\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}$

$= (1+y,\ 4+x+2y,\ -1+x+3y)$

$\therefore$

$|\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}|^2$

$= (1+y)^2 + (4+x+2y)^2 + (-1+x+3y)^2$

$= 2x^2 + 14y^2 + 10xy + 6x + 12y + 18$

xで降べきの順

$= 2x^2 + 2(5y+3)x + (14y^2 + 12y + 18)$

$= 2\{x^2 + (5y+3)x\} + (14y^2 + 12y + 18)$

$= 2\left(x + \frac{5y+3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5y+3}{2}\right)^2 + (14y^2 + 12y + 18)$

$= 2\left(x + \frac{5y+3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}y^2 - 3y + \frac{27}{2}$

$= 2\left(x + \frac{5y+3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(y-1)^2 + 12$

x，y は実数 より $\left(x + \frac{5y+3}{2}\right)^2 \geqq 0$，$(y-1)^2 \geqq 0$

よって $x + \frac{5y+3}{2} = 0$，$y - 1 = 0$ の時，$|\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}|^2$ は

最小値 12 をとる．

$x + \frac{5y+3}{2} = 0$，$y - 1 = 0$．解くと $x = -4$，$y = 1$

よって $|\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}|$ は，

$x = -4$，$y = 1$ の時，最小値 $2\sqrt{3}$ をとる。 //

9．球面 $x^2+y^2+z^2-12x-14y-16z-20=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) この球面の中心の座標と半径を求めよ。

(2) この球面と，xy 平面が交わってできる円の中心の座標と半径を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 14y - 16z - 20 = 0$

$(x^2 - 12x) + (y^2 - 14y) + (z^2 - 16z) - 20 = 0$

$(x-6)^2 - 36 + (y-7)^2 - 49 + (z-8)^2 - 64 - 20 = 0$

$\therefore\ (x-6)^2 + (y-7)^2 + (z-8)^2 = 169$

中心 $(6, 7, 8)$，半径 13 //

(2) xy 平面 $\Rightarrow z = 0$．

代入して

$(x-6)^2 + (y-7)^2 + (-8)^2 = 169$

$(x-6)^2 + (y-7)^2 = 105$

$\therefore$ 中心 $(6, 7, 0)$

半径 $\sqrt{105}$ //