数学演習（空間ベクトル）Ｈ２１．５．７　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．2つのベクトル $\vec{a}=(2,1,3)$, $\vec{b}=(1,-1,0)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

２．2直線 $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{4}$, $\dfrac{x+3}{10}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{7}$ のなす角 θ を求めよ。ただし，θ は鋭角とする。

３．3点 $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$ が定める平面 α に原点 O から垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

４．点 $A(-3,1,2)$ を中心とする球面に，点 $B(-1,0,3)$ で接する平面の方程式を求めよ。

5. $\angle AOB=\angle AOC=60^\circ$，$\angle BOC=90^\circ$，$OA=2$，$OB=OC=1$ である四面体 $OABC$ において，頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。このとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。また，線分 OH の長さを求めよ。

6. 正四面体 $ABCD$ において，$AB\perp CD$ であることを証明せよ。

7. 四面体 $OABC$ において，辺 OA を $1:2$ に内分する点を P，辺 OB を $5:1$ に内分する点を Q，辺 OC の中点を R とし，$\triangle PQR$ の重心を G とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) 直線 OG が平面 ABC と交わる点を X とする。$OG:GX$ を簡単な整数比で表せ。

(3) 直線 AG が平面 OBC と交わる点を Y とする。$\overrightarrow{OY}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

数学演習（空間ベクトル）H２１．５．７　　（　）組（　）番　名前（ ニたこ ）

1．2つのベクトル $\vec{a}=(2,1,3)$, $\vec{b}=(1,-1,0)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

$\vec{e}=(x,y,z)$ とおくと

$|\vec{e}|=1$ より $|\vec{e}|^2=x^2+y^2+z^2=1 \cdots ①$

$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=2x+1\cdot y+3z=0 \cdots ②$

$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$ より $\vec{b}\cdot\vec{e}=1\cdot x+(-1)y+0\cdot z=0 \cdots ③$

③より　$y=x$ で．これを②に代入して

$2x+x+3z=0 \quad \therefore z=-x$

ゆえに $y=x$ と $z=-x$ を①に代入して

$x^2+x^2+(-x)^2=1$

$\therefore x^2=\frac{1}{3}$ より $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

以上より．求めるベクトルは

$\vec{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

10

2．2直線 $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$, $\frac{x+3}{10}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{7}$ のなす角 θ を求めよ。ただし，θ は鋭角とする。

直線 $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$ の方向ベクトルを $\vec{d_1}$ とすると

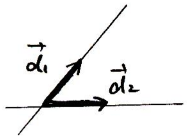
$\vec{d_1}=(5,3,4)$ であり

直線 $\frac{x+3}{10}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{7}$ の方向ベクトルを $\vec{d_2}$ とすると．

$\vec{d_2}=(10,-1,7)$ である。

$\vec{d_1}$ と $\vec{d_2}$ のなす角 θ' は

$$\cos\theta'=\frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\frac{5\cdot10+3(-1)+4\cdot7}{\sqrt{5^2+3^2+4^2}\sqrt{10^2+(-1)^2+7^2}}$$



$$=\frac{75}{\sqrt{50}\sqrt{150}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore 0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta'=30^\circ$

よってなす角 θ は $\theta=30^\circ$

10

3．3点 $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$ が定める平面 α に原点 O から垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

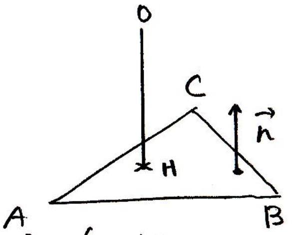
3点A.B.Cを通る平面の方程式は

$\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$

$\therefore 6x+2y+3z=6$

とおける。よって．この平面の法線ベクトルの

1つを $\vec{n}$ とすると $\vec{n}=(6,2,3)$ とできる。



今．$OH \parallel \vec{n}$ より

$\vec{OH}=k\vec{n}=(6k,2k,3k)$

とできるので．$H(6k,2k,3k)$

となる。また．Hは平面 $6x+2y+3z=6$ より

$6\cdot6k+2\cdot2k+3\cdot3k=6$

$\therefore k=\frac{6}{49}$ より $H\left(\frac{36}{49}, \frac{12}{49}, \frac{18}{49}\right)$

10

そして．

$OH=\sqrt{\left(\frac{36}{49}\right)^2+\left(\frac{12}{49}\right)^2+\left(\frac{18}{49}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{6}{49}\right)^2(6^2+2^2+3^2)}$

$=\frac{6}{49}\sqrt{49}=\frac{6}{7}$

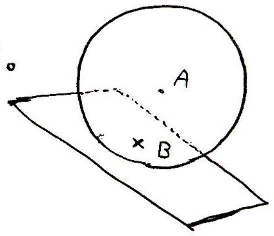
5

3

4．点 $A(-3,1,2)$ を中心とする球面に，点 $B(-1,0,3)$ で接する平面の方程式を求めよ。

求める平面は BA に垂直で．

点 $(-1,0,2)$ を通る平面である。



$\vec{BA}=(-3+1, 1-0, 2-3)$

$=(-2,1,-1)$

より．$\vec{BA}$ が法線ベクトルとなり

点 $(-1,0,3)$ を通る平面の方程式は

$(-2)\{x-(-1)\}+1\cdot(y-0)+(-1)(z-3)=0$

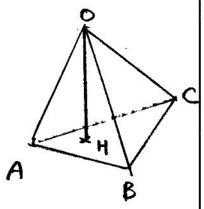
$\therefore -2x+y-z+1=0$

$\therefore 2x-y+z-1=0$

10

/45

5．∠AOB＝∠AOC＝60°，∠BOC＝90°，OA＝2，OB＝OC＝1 である四面体 $OABC$ において，頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。このとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。また，線分 OH の長さを求めよ。



Hは平面ABC上の点より

$$\overrightarrow{OH}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

$(r+s+t=1)$ とおける。

また．OH ⊥ 平面ABC より

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ が成り立つ。

ここで

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=r\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-r|\vec{a}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}-t\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=r\cdot1+s\cdot1^2+t\cdot0-r\cdot2^2-s\cdot1-t\cdot1\\&=-3r-t=0.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ も同様で．

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=-3r-s=0$$

$\therefore\ \begin{cases}r+s+t=1\\-3r-t=0\\-3r-s=0\end{cases}$ 解いて $r=-\frac{1}{5}$，$t=s=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \overrightarrow{OH}=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$

(10)

また．

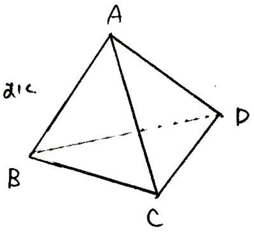
$$\begin{aligned}OH^2=|\overrightarrow{OH}|^2&=\left(\frac{1}{5}\right)^2|-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}|^2\\&=\left(\frac{1}{5}\right)^2\{|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{c}-6\vec{c}\cdot\vec{a}\}\\&=\left(\frac{1}{5}\right)^2(4+9+9-6+0-6)=\left(\frac{1}{5}\right)^2 10\end{aligned}$$

$OH>0$ より

$OH=\frac{\sqrt{10}}{5}$

(8)

6．正四面体 $ABCD$ において，$AB\perp CD$ であることを証明せよ。



証)

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおく

この時．

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})\\&=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=|\vec{b}||\vec{d}|\cos60^\circ-|\vec{b}||\vec{c}|\cos60^\circ\ \cdots(*)\end{aligned}$$

ここで．正四面体ABCDにおいて

$AB=AC=AD$

$\therefore\ |\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$

(10)

(*)に代入して

$(*)=|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cos60^\circ-|\vec{b}||\vec{b}|\cos60^\circ=0$

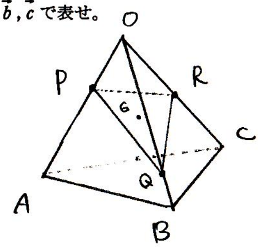
$\therefore$ $AB\perp CD$ である。//

7．四面体 $OABC$ において，辺 OA を 1:2 に内分する点を P，辺 OB を 5:1 に内分する点を Q，辺 OC の中点を R とし，△PQR の重心を G とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。

(2) 直線 OG が平面 ABC と交わる点を X とする。$OG:GX$ を簡単な整数比で表せ。

(3) 直線 AG が平面 OBC と交わる点を Y とする。$\overrightarrow{OY}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。



(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP})\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\end{aligned}$$

(7)

(2)

O, G, X は同一直線上にあるので．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX}&=k\overrightarrow{OG}\\&=\frac{1}{9}k\vec{a}+\frac{5}{18}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}\end{aligned}$$

とおける。ここで点Xは平面ABC上の点より

$$\frac{1}{9}k+\frac{5}{18}k+\frac{1}{6}k=1$$

$$\therefore\ k=\frac{9}{5}$$

(10)

よって $\overrightarrow{OX}=\frac{9}{5}\overrightarrow{OG}$ より $OG:GX=5:4$

(3) 3点A，G，Yは同一直線上にあるので

$\overrightarrow{AY}=k'\overrightarrow{AG}$ とおける。

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OY}&=\overrightarrow{OA}+k'\overrightarrow{AG}\\&=\overrightarrow{OA}+k'(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA})\\&=\vec{a}+k'\left\{\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)-\vec{a}\right\}\\&=\left(1-\frac{8}{9}k'\right)\vec{a}+\frac{5}{18}k'\vec{b}+\frac{1}{6}k'\vec{c}\ \cdots(\mathrm{i})\end{aligned}$$

また．Yは平面OBC上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OY}&=s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}\\&=s\vec{b}+t\vec{c}\ \cdots(\mathrm{ii})\end{aligned}$$ とおける。

(i)(ii)より 係数を比較して

$\begin{cases}1-\frac{8}{9}k'=0\\\frac{5}{18}k'=s\\\frac{1}{6}k'=t\end{cases}$ $\therefore\ k'=\frac{9}{8}$，$s=\frac{5}{16}$，$t=\frac{3}{16}$

以上より

$\overrightarrow{OY}=\frac{5}{16}\vec{b}+\frac{3}{16}\vec{c}$

(10)