数学演習（空間ベクトル）Ｈ２４．９．２０　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．xy 平面，zx 平面，z 軸，原点のそれぞれについて，点(2，−3，4)と対称な点の座標を求めよ。

２．原点 O と点(−4，−5，7)の距離を求めよ。

３．平行六面体 ABCD−EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AF}$　　(2) $\overrightarrow{CE}$　　(3) $\overrightarrow{GA}$

４．$\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$，$\vec{b}=(-3,\ 2,\ -1)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1) $2\vec{a}+3\vec{b}$　　(2) $-2(3\vec{a}+8\vec{b})$

５．$\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，ベクトル $\vec{d}=(11,\ 9,\ 4)$を適当な実数s，t，u を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

６．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積とそのなす角 θ を求めよ。$\vec{a}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ \sqrt{6})$

７．$\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

８．ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトルを求めよ。

9．空間における 3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　線分 AB を 4 : 1 に内分する点 D　　(2)　線分 BC を 3 : 2 に外分する点 E

(3)　線分 AC の中点 M　　(4)　△ABM の重心 G

10. 次のような球面の方程式を求めよ。

(1)　2 点 A (3，2，−4)，B (5，−6，2) を直径の両端とする球面

(2)　点 (2，−1，0) で xy 平面に接する半径 3 の球面

11. 四面体 OABC において，△ABC の重心を G，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を D，辺 OC を 2 : 3 に内分する点を E とする。直線 OG と平面 DBE の交点を P とするとき，OP : OG を求めよ。

12. 3 点 A (2，0，0)，B (0，1，0)，C (0，0，−2) の定める平面 α に原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。また，線分OHの長さを求めよ。

数学演習（空間ベクトル）Ｈ２４．９．２０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．xy 平面，zx 平面，z 軸，原点のそれぞれについて，点$(2,\ -3,\ 4)$と対称な点の座標を求めよ。

解答　xy 平面，zx 平面，z 軸，原点の順に
$(2,\ -3,\ -4)$，$(2,\ 3,\ 4)$，$(-2,\ 3,\ 4)$，$(-2,\ 3,\ -4)$

解説
xy 平面について対称な点は　$(2,\ -3,\ -4)$
zx 平面について対称な点は　$(2,\ 3,\ 4)$
z 軸について対称な点は　$(-2,\ 3,\ 4)$
原点について対称な点は　$(-2,\ 3,\ -4)$

2．原点 O と点$(-4,\ -5,\ 7)$の距離を求めよ。

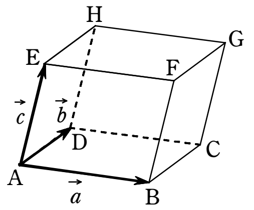
解答　$3\sqrt{10}$

解説
$\sqrt{(-4)^2+(-5)^2+7^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

3．平行六面体 ABCD－EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$

解答　(1) $\vec{a}+\vec{c}$　(2) $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　(3) $-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

解説
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}+\vec{c}$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}$
$=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\overrightarrow{\mathrm{GH}}+\overrightarrow{\mathrm{HE}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}}=-\vec{a}+(-\vec{b})+(-\vec{c})$
$=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$



4．$\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$，$\vec{b}=(-3,\ 2,\ -1)$ のとき，次のベクトルを求めよ。
(1) $2\vec{a}+3\vec{b}$　　(2) $-2(3\vec{a}+8\vec{b})$

解答　(1) $(-7,\ 2,\ 3)$　(2) $(42,\ -20,\ -2)$

解説
(1) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,\ -2,\ 3)+3(-3,\ 2,\ -1)$
$=(2,\ -4,\ 6)+(-9,\ 6,\ -3)$
$=(-7,\ 2,\ 3)$
(2) $-2(3\vec{a}+8\vec{b})=-6\vec{a}-16\vec{b}=-6(1,\ -2,\ 3)-16(-3,\ 2,\ -1)$
$=(-6,\ 12,\ -18)+(48,\ -32,\ 16)$
$=(42,\ -20,\ -2)$

5．$\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，ベクトル $\vec{d}=(11,\ 9,\ 4)$を適当な実数s，t，u を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

解答　$\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$

解説
$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s(0,\ 1,\ 1)+t(-1,\ 2,\ -3)+u(3,\ 4,\ -1)$
$=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$
$\vec{d}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とすると
$(11,\ 9,\ 4)=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$
よって　$-t+3u=11$　……①，$s+2t+4u=9$　……②，$s-3t-u=4$　……③
②－③ から　$t+u=1$　……④
①，④ を解いて　$t=-2$，$u=3$
ゆえに，③ から　$s+6-3=4$　よって　$s=1$
したがって　$\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$

6．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積とそのなす角 θ を求めよ。$\vec{a}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ \sqrt{6})$

解答　$-\sqrt{6}$，$\theta=120°$

解説
$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+1\times(-1)+(-1)\times\sqrt{6}=-\sqrt{6}$
よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{6})^2}}$
$=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$
$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

7．$\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

解答　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

解説
$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 2,\ 3)+t(2,\ -1,\ 1)=(1+2t,\ 2-t,\ 3+t)$
よって　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1+2t)^2+(2-t)^2+(3+t)^2=6t^2+6t+14$
$=6\left\{t^2+t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}-6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+14=6\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}$
ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{25}{2}$ をとる。
$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。
よって　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

8．ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトルを求めよ。

解答　$\left(\dfrac{4\sqrt{21}}{7},\ \dfrac{\sqrt{21}}{7},\ -\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\right)$ または $\left(-\dfrac{4\sqrt{21}}{7},\ -\dfrac{\sqrt{21}}{7},\ \dfrac{2\sqrt{21}}{7}\right)$

解説
求めるベクトルを $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$ とする。
$\vec{a}\perp\vec{c}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$　よって　$x+2y+3z=0$　……①
$\vec{b}\perp\vec{c}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　よって　$x-2y+z=0$　……②
$|\vec{c}|=3$ であるから　$|\vec{c}|^2=3^2$　よって　$x^2+y^2+z^2=9$　……③
①－②×3 から　$x=4y$　……④　①－② から　$z=-2y$　……⑤
④，⑤ を ③ に代入して　$(4y)^2+y^2+(-2y)^2=9$　ゆえに　$y^2=\dfrac{3}{7}$
したがって　$y=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{7}$
このとき，④，⑤ から　$y=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ のとき　$x=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$，$z=-\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$
$y=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ のとき　$x=-\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$，$z=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$
よって，求めるベクトルは
$\left(\dfrac{4\sqrt{21}}{7},\ \dfrac{\sqrt{21}}{7},\ -\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\right)$ または $\left(-\dfrac{4\sqrt{21}}{7},\ -\dfrac{\sqrt{21}}{7},\ \dfrac{2\sqrt{21}}{7}\right)$

9．空間における 3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。
(1) 線分 AB を 4 : 1 に内分する点 D　　(2) 線分 BC を 3 : 2 に外分する点 E
(3) 線分 AC の中点 M　　(4) △ABM の重心 G

解答　(1) $\dfrac{\vec{a}+4\vec{b}}{5}$　(2) $-2\vec{b}+3\vec{c}$　(3) $\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$　(4) $\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{6}$

解説
点 D，E，M，G の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{m}$，$\vec{g}$ とすると
(1) $\vec{d}=\dfrac{1\cdot\vec{a}+4\vec{b}}{4+1}=\dfrac{\vec{a}+4\vec{b}}{5}$
(2) $\vec{e}=\dfrac{-2\vec{b}+3\vec{c}}{3-2}=-2\vec{b}+3\vec{c}$
(3) $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$
(4) $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{m}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right)=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{6}$

10．次のような球面の方程式を求めよ。
(1) 2 点 A$(3,\ 2,\ -4)$，B$(5,\ -6,\ 2)$ を直径の両端とする球面
(2) 点 $(2,\ -1,\ 0)$ で xy 平面に接する半径 3 の球面

解答　(1) $(x-4)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=26$

(2) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$ または $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$

解説

(1) 線分ABの中点をCとすると，この球面の中心は点Cで，半径は線分CAの長さに等しい。点Cの座標は

$$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{2-6}{2},\ \frac{-4+2}{2}\right) \quad すなわち \quad (4,\ -2,\ -1)$$

よって　$CA=\sqrt{(3-4)^2+\{2-(-2)\}^2+\{-4-(-1)\}^2}=\sqrt{26}$

したがって，求める球面の方程式は　$(x-4)^2+\{y-(-2)\}^2+\{z-(-1)\}^2=(\sqrt{26})^2$

すなわち　$(x-4)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=26$

(2) 球面の中心の座標は

$(2,\ -1,\ 3)$ または $(2,\ -1,\ -3)$

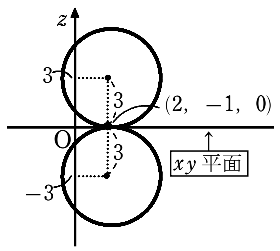
よって，求める球面の方程式は

$(x-2)^2+\{y-(-1)\}^2+(z-3)^2=3^2$ または

$(x-2)^2+\{y-(-1)\}^2+\{z-(-3)\}^2=3^2$

すなわち　$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$ または

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$



11. 四面体OABCにおいて，△ABCの重心をG，辺OAを1：2に内分する点をD，辺OCを2：3に内分する点をEとする。直線OGと平面DBEの交点をPとするとき，OP：OGを求めよ。

解答　6：13

解説

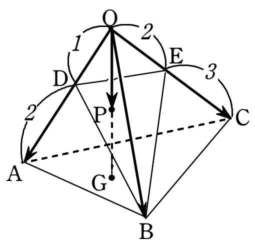
点Pは平面DBE上にあるから，$\overrightarrow{DP}=s\overrightarrow{DB}+t\overrightarrow{DE}$ となる実数 s，t がある。

よって　$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+t(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD})$

ゆえに　$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OE}$

$=(1-s-t)\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{1-s-t}{3}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}t\overrightarrow{OC}$



また，点Pは直線OG上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right)=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OC}$

ゆえに　$\frac{1-s-t}{3}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}t\overrightarrow{OC}=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OC}$

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから

$\frac{1-s-t}{3}=\frac{k}{3}$ ……①，　$s=\frac{k}{3}$，$\frac{2}{5}t=\frac{k}{3}$ ……②

②から　$t=\frac{5}{6}k$　　$s=\frac{k}{3}$，$t=\frac{5}{6}k$ を①に代入して　$k=\frac{6}{13}$

よって，$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\overrightarrow{OG}$ であるから　OP：OG＝6：13

別解　点Pは直線OG上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right)=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{k}{3}\cdot 3\overrightarrow{OD}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\cdot\frac{5}{2}\overrightarrow{OE}$

$=k\overrightarrow{OD}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{5}{6}k\overrightarrow{OE}$

点Pは平面DBE上にあるから　$k+\frac{k}{3}+\frac{5}{6}k=1$　　ゆえに　$k=\frac{6}{13}$

よって，$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\overrightarrow{OG}$ であるから　OP：OG＝6：13

12. 3点A(2, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, −2) の定める平面 α に原点Oから垂線OHを下ろす。点Hの座標を求めよ。また，線分OHの長さを求めよ。

解答　$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$，$\frac{\sqrt{6}}{3}$

解説

$H(x, y, z)$ とおく。すると，Hは平面ABC上なので

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　なる実数 s, t が存在する。

よって，

$\overrightarrow{AH}=(x-2, y-0, z-0)=(x-2, y, z)$

$\overrightarrow{AB}=(0-2, 1-0, 0-0)=(-2, 1, 0)$

$\overrightarrow{AC}=(0-2, 0-0, -2-0)=(-2, 0, -2)$

よって　$(x-2, y, z)=s(-2, 1, 0)+t(-2, 0, -2)$

より　$(x-2, y, z)=(-2s-2t, s, -2t)$

なので　$x-2=-2s-2t$，$y=s$，$z=-2t$

したがって　$x=2-2s-2t$，$y=s$，$z=-2t$　から，点Hの座標は

$H(2-2s-2t, s, -2t)$

と表すことができる。ゆえに，$\overrightarrow{OH}=(2-2s-2t, s, -2t)$　となる。

OH⊥(平面 α) であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　より

$(2-2s-2t)\times(-2)+s\times 1+(-2t)\times 0=0$　より　$5s+4t-4=0$

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　より

$(2-2s-2t)\times(-2)+s\times 0+(-2t)\times(-2)=0$　より　$4s+8t-4=0$

これを解いて　$s=\frac{2}{3}, t=\frac{1}{6}$　から　$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ より

点Hの座標は　$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

また，$OH=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

別解　点Hは平面 α 上にあるから，s，t，u を実数とすると

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$

と表される。

よって　$\overrightarrow{OH}=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 1,\ 0)+u(0,\ 0,\ -2)$

$=(2s,\ t,\ -2u)$

OH⊥(平面 α) であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

ここで　$\overrightarrow{AB}=(0-2,\ 1-0,\ 0-0)=(-2,\ 1,\ 0)$

$\overrightarrow{AC}=(0-2,\ 0-0,\ -2-0)=(-2,\ 0,\ -2)$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から　$2s\times(-2)+t\times 1+(-2u)\times 0=0$

よって　$t=4s$　……①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から　$2s\times(-2)+t\times 0+(-2u)\times(-2)=0$

よって　$u=s$　……②

①，②を $s+t+u=1$ に代入すると　$s+4s+s=1$　　ゆえに　$s=\frac{1}{6}$

よって，①，②から　$t=\frac{2}{3}$，$u=\frac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA}=(2, 0, 0)$，$\overrightarrow{OB}=(0, 1, 0)$，$\overrightarrow{OC}=(0, 0, -2)$　より代入して

$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{6}(2, 0, 0)+\frac{2}{3}(0, 1, 0)+\frac{1}{6}(0, 0, -2)$

$=\left(\frac{1}{6}\cdot 2, 0, 0\right)+\left(0, \frac{2}{3}, 0\right)+\left(0, 0, -2\cdot\frac{1}{6}\right)$

つまり，$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ であるから，点Hの座標は　$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

注意　点Pが平面ABC上にある

$\iff \overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$ (s，t，u は実数)