数学演習（空間ベクトル）Ｈ２１．５．１４　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．四面体 $ABCD$ の辺 AC , BD の中点をそれぞれ M , N とするとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{MN}$$

２．４点 $A(0,1,5)$, $B(1,2,6)$, $C(-2,-3,-3)$, $D(3,k,-1)$ が同一平面上にあるように，定数 k の値を定めよ。

３．平行四辺形の３つの頂点が $A(3,4,1)$, $B(4,2,4)$, $C(-1,0,2)$ であるとき，第４の頂点の座標を求めよ。

４．次の球面の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,-1,1)$ を通り，３つの座標平面に接する球面

(2) 中心が x 軸上にあって，２点 $(1,1,2)$, $(2,2,4)$ を通る球面

５．四面体 $OABC$ において，辺 OA の中点を M ，$\triangle ABC$ の重心を G ，直線 OG と $\triangle MBC$ の交点を H とする。$OH:OG$ を簡単な整数比で表せ。

６．３点 $A(1,4,0)$, $B(-2,1,0)$, $C(1,1,3)$ がある。

(1) $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。

(2) $\triangle ABC$ を１つの面とする正四面体の第４の頂点 D の座標を求めよ。

７．四面体 $ABCD$ の辺 AB, BC, CD をそれぞれ $5:3$, $3:1$, $7:1$ に内分する点を P, Q, R とし，$\triangle BCD$, $\triangle PQR$ の重心をそれぞれ G, H とする。

(1) ３点 A, G, H は一直線上にあることを示せ。

(2) $AH:HG$ を簡単な整数比で表せ。

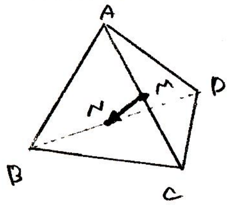
８．１辺の長さが２である正四面体 $OABC$ の辺 BC, CA の中点をそれぞれ M, N とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MN}$ を求めよ。

(3) 線分 OA と線分 MN のなす角 θ を求めよ。ただし，θ は鋭角とする。

1．四面体 $ABCD$ の辺 AC, BD の中点をそれぞれ M, N とするとき，次の等式が成り立つことを示せ。



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{MN}$$

証）A.B.C.D の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とする。すると

$(左辺)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$

$=(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{d}-\vec{a})+(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{d}-\vec{c})$

$=-2\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}+2\vec{d}$

$(右辺)=4\overrightarrow{MN}$

$=4(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$

$=4\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right)$

$=2\vec{b}+2\vec{d}-2\vec{a}-2\vec{c}$

よって $(左辺)=(右辺)$ が成り立つ//

2．4点 $A(0,1,5), B(1,2,6), C(-2,-3,-3), D(3,k,-1)$ が同一平面上にあるように，定数 k の値を定めよ。

4点A.B.C.Dが同一平面上にある時

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ …(＊)

なる s と t が存在する。

$\overrightarrow{AD}=(3-0, k-1, -1-5)=(3, k-1, -6)$

$\overrightarrow{AB}=(1-0, 2-1, 6-5)=(1,1,1)$

$\overrightarrow{AC}=(-2-0, -3-1, -3-5)=(-2,-4,-8)$

よって(＊)より

$(3, k-1, -6)=s(1,1,1)+t(-2,-4,-8)$

∴ $\begin{cases} 3=s-2t \cdots ① \\ k-1=s-4t \cdots ② \\ -6=s-8t \cdots ③ \end{cases}$

①③より

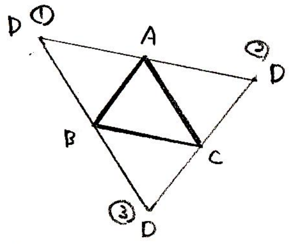
$s=6,\ t=\dfrac{3}{2}$

これを②に代入して

$k-1=6-4\cdot\dfrac{3}{2}$

∴ $k=1$

3．平行四辺形の3つの頂点が $A(3,4,1), B(4,2,4), C(-1,0,2)$ であるとき，第4の頂点の座標を求めよ。



D(x.y.z)とおく。

①の時

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ より

$(x-3, y-4, z-1)=(4+1, 2-0, 4-2)$

∴ $x=8,\ y=6,\ z=3$

D(8.6.3)

②の時

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ より

$(x-3, y-4, z-1)=(-1-4, 0-2, 2-4)$

∴ $x=-2,\ y=2,\ z=-1$

D(-2.2.-1)

③の時

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ より

$(4-3, 2-4, 4-1)=(x+1, y-0, z-2)$

∴ $x=0,\ y=-2,\ z=5$

D(0.-2.5)

以上より

D(8.6.3), (-2.2.-1), (0,-2,5)

4．次の球面の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,-1,1)$ を通り，3つの座標平面に接する球面

(2) 中心が x 軸上にあって，2点 $(1,1,2), (2,2,4)$ を通る球面

(1) 求める球面は条件より

$x>0,\ y<0,\ z>0$ である空間に存在する。

3つの座標平面に接するので半径を r $(r>0)$ とすると

中心は $(r, -r, r)$ とおける。よって球面の方程式は

$(x-r)^2+(y+r)^2+(z-r)^2=r^2$

で、これが点 $(2,-1,1)$ を通るから

$(2-r)^2+(-1+r)^2+(1-r)^2=r^2$

∴ 整理して

$r^2-4r+3=0$

∴ $r=1, 3$ $(r>0$をみたす$)$

∴ $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$

$(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$

(2) 中心を $(a,0,0)$，半径を r とおくと

$(x-a)^2+y^2+z^2=r^2$

2点 $(1,1,2), (2,2,4)$ を通るので

$(1-a)^2+1^2+2^2=r^2$ …①

$(2-a)^2+2^2+4^2=r^2$ …②

① − ② より整理して

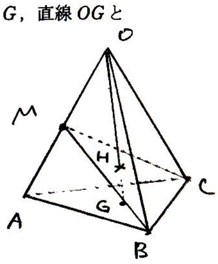
$2a-18=0$

∴ $a=9$

①に代入して $r^2=69$

∴ $(x-9)^2+y^2+z^2=69$

5．四面体 $OABC$ において，辺 OA の中点を M，$\triangle ABC$ の重心を G，直線 OG と $\triangle MBC$ の交点を H とする。$OH:OG$ を簡単な整数比で表せ。



$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

ここで O.H.G は同一直線上より

$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}$ とおける。

∴

$\overrightarrow{OH}=k\cdot\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{1}{3}k(2\overrightarrow{OM})+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{2}{3}k\overrightarrow{OM}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{OC}$

となり、また H は平面 MBC 上にあるので

$\dfrac{2}{3}k+\dfrac{1}{3}k+\dfrac{1}{3}k=1$

∴ $k=\dfrac{3}{4}$

よって $\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OG}$ が成り立つので

$OH:OG=3:4$

6．3点 $A(1,4,0)$，$B(-2,1,0)$，$C(1,1,3)$ がある。

(1) $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。

(2) $\triangle ABC$ を1つの面とする正四面体の第4の頂点 D の座標を求めよ。

(1)

$$AB=\sqrt{(1+2)^2+(4-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{9+9+0}=3\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(-2-1)^2+(1-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{9+0+9}=3\sqrt{2}$$

$$CA=\sqrt{(1-1)^2+(4-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{0+9+9}=3\sqrt{2}$$

よって $AB=BC=CA=3\sqrt{2}$ より $\triangle ABC$ は正三角形 //

(2) 正四面体より $AD=BD=CD=3\sqrt{2}$ である。

$D(x,y,z)$ とすると

$AD=3\sqrt{2} \Longleftrightarrow (x-1)^2+(y-4)^2+(z-0)^2=18$ …①

$BD=3\sqrt{2} \Longleftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=18$ …②

$CD=3\sqrt{2} \Longleftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=18$ …③

①−②より

$x+y=2$ …④

①−③より

$y-z=1$ …⑤

④より $x=2-y$，⑤より $z=y-1$

これを①に代入して

$(1-y)^2+(y-4)^2+(y-1)^2=18$

整理して解いて

$y=4,\ 0$

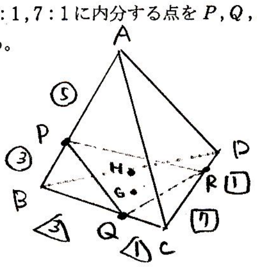
∴ $D(-2,4,3)$

$(2,0,-1)$ //

7．四面体 $ABCD$ の辺 AB，BC，CD をそれぞれ $5:3$，$3:1$，$7:1$ に内分する点を P，Q，R とし，$\triangle BCD$，$\triangle PQR$ の重心をそれぞれ G，H とする。

(1) 3点 A，G，H は一直線上にあることを示せ。

(2) $AH:HG$ を簡単な整数比で表せ。



(1) 証) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$

とする。すると

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

また，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{8}\vec{b},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{3+1},\quad \overrightarrow{AR}=\frac{\vec{c}+7\vec{d}}{7+1}$$

より

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{8}\vec{b}+\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}+\frac{\vec{c}+7\vec{d}}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{7\vec{b}+7\vec{c}+7\vec{d}}{8}=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\frac{7}{8}\overrightarrow{AG}$$

∴ $\overrightarrow{AH}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AG}$ が成り立つので A,G,H は同一直線上にある。//

(2) (1)より $\overrightarrow{AH}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AG}$ が成り立つので

$AH:HG=7:1$ //

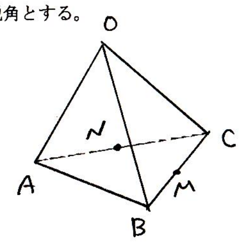
8．1辺の長さが2である正四面体 $OABC$ の辺 BC，CA の中点をそれぞれ M，N とする。

また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MN}$ を求めよ。

(3) 線分 OA と線分 MN のなす角 θ を求めよ。ただし，θ は鋭角とする。



(1)

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$ //

(2)

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

ここで，$|\vec{a}|=OA=2$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$

$=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2$ より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot 2$$

$$=2-1=1$$ //

(3)

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MN}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MN}|\cos\theta$ …(*)

ここで，

$$|\overrightarrow{MN}|^2=\left|\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right|^2$$

$$=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$$

$$=\frac{1}{4}(2^2-2\cdot 2+2^2)=1$$

∴ $|\overrightarrow{MN}|=1$ $(|\overrightarrow{MN}|>0)$

ゆえに(2)から(*)に代入して

$1=2\cdot 1\cdot\cos\theta$

∴ $\cos\theta=\frac{1}{2}$ より θ は鋭角から

$\theta=60^\circ$ //