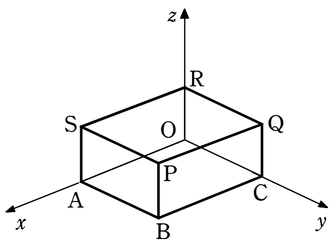
数学演習（空間ベクトル）Ｈ２３．１０．１２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1．右の図において，点 P の座標が $(4,\ 3,\ 2)$ のとき，直方体 OABC − RSPQ の O，P 以外の頂点の座標を求めよ。



2．xy 平面，yz 平面，x 軸，原点のそれぞれについて，点 $(3,\ 7,\ -4)$ と対称な点の座標を求めよ。

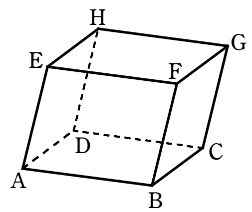
3．z 軸上にある点 A と点 B$(1,\ 5,\ -7)$ について，原点 O との距離が等しいとき，点 A の座標を求めよ。

4．3 点 A$(2,\ -3,\ 0)$，B$(5,\ 1,\ 5)$，C$(8,\ -1,\ 1)$ について，2 点 A，B 間，および B，C 間の距離をそれぞれ求めよ。また，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を 2 : 3 に内分する点，外分する点

(2)　線分 BC の中点　　　(3)　△ABC の重心

5．平行六面体 ABCD − EFGH がある。各頂点を始点，終点とする有向線分で表されるベクトルのうち，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ に等しいものをそれぞれ求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の逆ベクトルを求めよ。



6．平行六面体 ABCD − EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

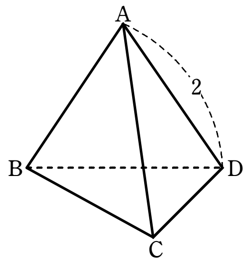
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}$

7．$\vec{a}=(1,\ 2,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，ベクトル $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を求めよ。また，その大きさを求めよ。

8．$\vec{a}=(2,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(0,\ -2,\ 3)$，$\vec{c}=(-3,\ 2,\ 1)$ のとき，$\vec{e}=(7,\ 6,\ -12)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$（$s$，$t$，$u$ は実数）の形に表せ。

9．$\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

10. 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，次の内積を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

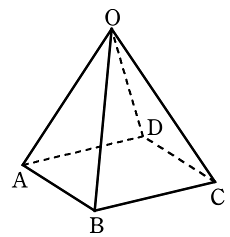
11. 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。$\vec{a}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ \sqrt{6})$

12. 3 点 A$(-3,\ 1,\ 2)$，B$(-2,\ 3,\ 1)$，C$(-1,\ 2,\ 3)$ を頂点とする △ABC において，次のものを求めよ。

(1)　∠ABC の大きさ　　(2)　△ABC の面積

13. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトルを求めよ。

14. 右の図の四角錐 O−ABCD において，
OA＝OB＝OC＝OD，AB＝BC＝CD＝DA である。
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

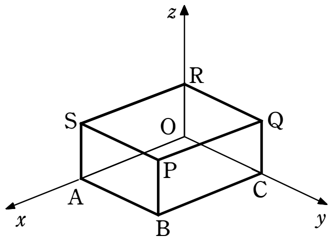


15. 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺 AB の中点を M，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を N，△OAB の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GN}}$

16. 四面体 OABC において，辺 BC の中点を P，辺 CA を 2 : 1 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

1．右の図において，点 P の座標が $(4,\ 3,\ 2)$ のとき，直方体 OABC－RSPQ の O，P 以外の頂点の座標を求めよ。



解答　A : $(4,\ 0,\ 0)$，B : $(4,\ 3,\ 0)$，C : $(0,\ 3,\ 0)$，Q : $(0,\ 3,\ 2)$，R : $(0,\ 0,\ 2)$，S : $(4,\ 0,\ 2)$

解説

線分 PB，PQ，PS は，点 P からそれぞれ xy 平面，yz 平面，zx 平面に下ろした垂線である。また，線分 PA，PC，PR は，点 P からそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸に下ろした垂線である。

よって，点 A の座標は　$(4,\ 0,\ 0)$，　点 B の座標は　$(4,\ 3,\ 0)$，

点 C の座標は　$(0,\ 3,\ 0)$，　点 Q の座標は　$(0,\ 3,\ 2)$，

点 R の座標は　$(0,\ 0,\ 2)$，　点 S の座標は　$(4,\ 0,\ 2)$

2．xy 平面，yz 平面，x 軸，原点のそれぞれについて，点 $(3,\ 7,\ -4)$ と対称な点の座標を求めよ。

解答　xy 平面 : $(3,\ 7,\ 4)$，yz 平面 : $(-3,\ 7,\ -4)$，x 軸 : $(3,\ -7,\ 4)$

原点 : $(-3,\ -7,\ 4)$

解説

xy 平面について対称な点の座標は　$(3,\ 7,\ 4)$

yz 平面について対称な点の座標は　$(-3,\ 7,\ -4)$

x 軸について対称な点の座標は　$(3,\ -7,\ 4)$

原点について対称な点の座標は　$(-3,\ -7,\ 4)$

参考　次の座標平面，座標軸，点について，点 $(a,\ b,\ c)$ と対称な点の座標は

xy 平面 …… $(a,\ b,\ -c)$　　x 軸 …… $(a,\ -b,\ -c)$

yz 平面 …… $(-a,\ b,\ c)$　　y 軸 …… $(-a,\ b,\ -c)$

zx 平面 …… $(a,\ -b,\ c)$　　z 軸 …… $(-a,\ -b,\ c)$

原点 …… $(-a,\ -b,\ -c)$

3．z 軸上にある点 A と点 B$(1,\ 5,\ -7)$ について，原点 O との距離が等しいとき，点 A の座標を求めよ。

解答　$(0,\ 0,\ 5\sqrt{3})$ または $(0,\ 0,\ -5\sqrt{3})$

解説

点 A は z 軸上にあるから，その座標を $(0,\ 0,\ z)$ とおく。

OA＝OB であるから　$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OB}^2$

よって　$0^2+0^2+z^2=1^2+5^2+(-7)^2$

ゆえに　$z^2=75$　　よって　$z=\pm5\sqrt{3}$

したがって，点 A の座標は　$(0,\ 0,\ 5\sqrt{3})$ または $(0,\ 0,\ -5\sqrt{3})$

4．3 点 A$(2,\ -3,\ 0)$，B$(5,\ 1,\ 5)$，C$(8,\ -1,\ 1)$ について，2 点 A，B 間，および B，C 間の距離をそれぞれ求めよ。また，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を 2 : 3 に内分する点，外分する点

(2)　線分 BC の中点　　　(3)　△ABC の重心

解答　A，B 間の距離 $5\sqrt{2}$; B，C 間の距離 $\sqrt{29}$

(1)　内分 $\left(\dfrac{16}{5},\ -\dfrac{7}{5},\ 2\right)$，外分 $(-4,\ -11,\ -10)$

(2)　$\left(\dfrac{13}{2},\ 0,\ 3\right)$　　(3)　$(5,\ -1,\ 2)$

解説

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(5-2)^2+\{1-(-3)\}^2+(5-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(8-5)^2+(-1-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{29}$$

(1)　内分 : $\left(\dfrac{3\cdot2+2\cdot5}{2+3},\ \dfrac{3\cdot(-3)+2\cdot1}{2+3},\ \dfrac{3\cdot0+2\cdot5}{2+3}\right)$

すなわち　$\left(\dfrac{16}{5},\ -\dfrac{7}{5},\ 2\right)$

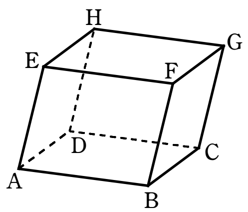
外分 : $\left(\dfrac{-3\cdot2+2\cdot5}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot(-3)+2\cdot1}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot0+2\cdot5}{2-3}\right)$

すなわち　$(-4,\ -11,\ -10)$

(2)　$\left(\dfrac{5+8}{2},\ \dfrac{1+(-1)}{2},\ \dfrac{5+1}{2}\right)$　　すなわち　$\left(\dfrac{13}{2},\ 0,\ 3\right)$

(3)　$\left(\dfrac{2+5+8}{3},\ \dfrac{-3+1+(-1)}{3},\ \dfrac{0+5+1}{3}\right)$　　すなわち　$(5,\ -1,\ 2)$

5．平行六面体 ABCD－EFGH がある。各頂点を始点，終点とする有向線分で表されるベクトルのうち，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ に等しいものをそれぞれ求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の逆ベクトルを求めよ。



解答　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に等しいベクトル : $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ に等しいベクトル : $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の逆ベクトル : $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HD}}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の逆ベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{EA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HD}}$

6．平行六面体 ABCD－EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}$

解答　(1)　$\vec{a}+\vec{c}$　　(2)　$-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　　(3)　$-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

解説

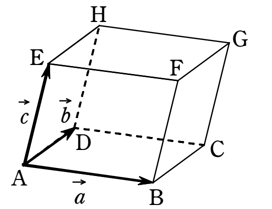
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}+\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}$

$=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\overrightarrow{\mathrm{GH}}+\overrightarrow{\mathrm{HE}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}}=-\vec{a}+(-\vec{b})+(-\vec{c})$

$=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$



7．$\vec{a}=(1,\ 2,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，ベクトル $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を求めよ。また，その大きさを求めよ。

解答　順に　$(-5,\ 9,\ 4)$，$\sqrt{122}$

解説

$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ 2,\ -1)-3(2,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ 0)$

$=(2,\ 4,\ -2)+(-6,\ 3,\ 6)+(-1,\ 2,\ 0)$

$=(-5,\ 9,\ 4)$

また　$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(-5)^2+9^2+4^2}=\sqrt{122}$

8．$\vec{a}=(2,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(0,\ -2,\ 3)$，$\vec{c}=(-3,\ 2,\ 1)$ のとき，$\vec{e}=(7,\ 6,\ -12)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ （s，t，u は実数）の形に表せ。

解答　$\vec{e}=2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$

解説

$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s(2,\ 1,\ -1)+t(0,\ -2,\ 3)+u(-3,\ 2,\ 1)$

$=(2s-3u,\ s-2t+2u,\ -s+3t+u)$

$\vec{e}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とすると

$(7,\ 6,\ -12)=(2s-3u,\ s-2t+2u,\ -s+3t+u)$

よって　$2s-3u=7$ …… ①，$s-2t+2u=6$ …… ②，$-s+3t+u=-12$ …… ③

②×3＋③×2 から　$s+8u=-6$ …… ④

①，④ を解いて　$s=2$，$u=-1$

よって，② から　$2-2t+2\cdot(-1)=6$　　ゆえに　$t=-3$

したがって　$\vec{e}=2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$

9．$\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

解答　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

解説

$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 2,\ 3)+t(2,\ -1,\ 1)=(1+2t,\ 2-t,\ 3+t)$

よって　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1+2t)^2+(2-t)^2+(3+t)^2=6t^2+6t+14$

$=6\left\{t^2+t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}-6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+14=6\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}$

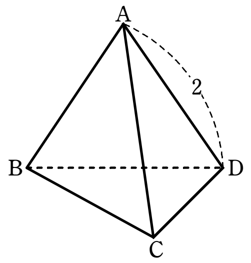
ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{25}{2}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

よって　$t=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

10. 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$



解答　(1) 2　(2) -2

解説

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

(2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CA}$ のなす角は 120° であるから

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CA}|\cos 120^\circ=2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$$

別解　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ$

$$=-2\times2\times\frac{1}{2}=-2$$

11. 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。$\vec{a}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ \sqrt{6})$

解答　$\theta=120^\circ$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+1\times(-1)+(-1)\times\sqrt{6}=-\sqrt{6}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{6})^2}}$

$$=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

12. 3 点 A$(-3,\ 1,\ 2)$，B$(-2,\ 3,\ 1)$，C$(-1,\ 2,\ 3)$ を頂点とする △ABC において，次のものを求めよ。

(1) ∠ABC の大きさ　　(2) △ABC の面積

解答　(1) 60°　(2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

解説

(1) $\overrightarrow{BA}=(-3-(-2),\ 1-3,\ 2-1)=(-1,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{BC}=(-1-(-2),\ 2-3,\ 3-1)=(1,\ -1,\ 2)$

よって　$\cos\angle ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{-1\times1+(-2)\times(-1)+1\times2}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}$

$$=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\angle ABC\leqq180^\circ$ であるから　$\angle ABC=60^\circ$

(2) 求める面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\sin 60^\circ=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

13. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトルを求めよ。

解答　$\left(\frac{4\sqrt{21}}{7},\ \frac{\sqrt{21}}{7},\ -\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)$ または $\left(-\frac{4\sqrt{21}}{7},\ -\frac{\sqrt{21}}{7},\ \frac{2\sqrt{21}}{7}\right)$

解説

求めるベクトルを $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{c}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$　よって　$x+2y+3z=0$　…… ①

$\vec{b}\perp\vec{c}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　よって　$x-2y+z=0$　…… ②

$|\vec{c}|=3$ であるから　$|\vec{c}|^2=3^2$　よって　$x^2+y^2+z^2=9$　…… ③

①$-$②$\times3$ から　$x=4y$　…… ④　　①$-$② から　$z=-2y$　…… ⑤

④，⑤ を ③ に代入して　$(4y)^2+y^2+(-2y)^2=9$　ゆえに　$y^2=\frac{3}{7}$

したがって　$y=\pm\frac{\sqrt{21}}{7}$

このとき，④，⑤ から　$y=\frac{\sqrt{21}}{7}$ のとき　$x=\frac{4\sqrt{21}}{7}$，$z=-\frac{2\sqrt{21}}{7}$

$y=-\frac{\sqrt{21}}{7}$ のとき　$x=-\frac{4\sqrt{21}}{7}$，$z=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

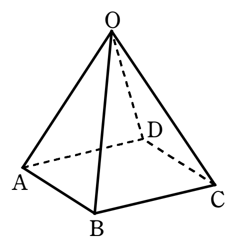
よって，求めるベクトルは

$$\left(\frac{4\sqrt{21}}{7},\ \frac{\sqrt{21}}{7},\ -\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)\ \text{または}\ \left(-\frac{4\sqrt{21}}{7},\ -\frac{\sqrt{21}}{7},\ \frac{2\sqrt{21}}{7}\right)$$

14. 右の図の四角錐 O－ABCD において，

OA＝OB＝OC＝OD，AB＝BC＝CD＝DA である。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{CA}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



解答　$\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{c}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

解説

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{c}$

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

15. 四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 AB の中点を M，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を N，△OAB の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{MN}$　　(2) $\overrightarrow{GN}$

解答　(1) $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$　(2) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$

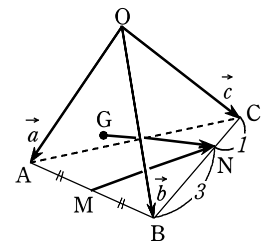
解説

(1) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{3+1}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

$$=\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$$

(2) $\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{4}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$

$$=\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$$



16. 四面体 OABC において，辺 BC の中点を P，辺 CA を 2 : 1 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{AP}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$，$\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

解説

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}-\overrightarrow{OA}$

$$=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+1\cdot\overrightarrow{OC}}{1+2}-\overrightarrow{OB}$

$$=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$