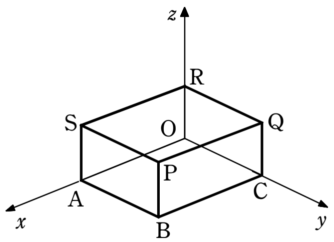
数学演習（空間ベクトル）Ｈ２１．５．６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．右の図において，点 P の座標が $(4,\ 3,\ 2)$ のとき，直方体 OABC－RSPQ の O，P 以外の頂点の座標を求めよ。



２．原点 O と次の点の距離を求めよ。

(1)　$(3,\ -2,\ 4)$　　(2)　$(-4,\ -5,\ 7)$

３．2 点 $A(3,\ a,\ 1)$，$B(1,\ 4,\ -3)$ について，原点 O との距離が等しいとき，a の値を求めよ。

４．平行六面体 ABCD－EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AF}$　　(2)　$\overrightarrow{CE}$　　(3)　$\overrightarrow{GA}$

５．次のベクトルの大きさを求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 5,\ 1)$　　(2)　$\vec{p}=(1,\ -6,\ -2\sqrt{3})$

６．$\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$，$\vec{b}=(-3,\ 2,\ -1)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(3)　$-2\vec{b}$

(4)　$2\vec{a}+3\vec{b}$　　(5)　$-\vec{a}+2\vec{b}$　　(6)　$-2(3\vec{a}+8\vec{b})$

７．原点 O と 3 点 $A(1,\ 2,\ 4)$，$B(-1,\ 2,\ 3)$，$C(0,\ -3,\ -2)$ について，次のベクトルを成分表示せよ。また，その大きさを求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}$　　(2)　$\overrightarrow{AC}$　　(3)　$\overrightarrow{CB}$

８．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ \sqrt{6})$　　(2)　$\vec{a}=(2,\ 3,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ -3,\ 1)$

(3)　$\vec{a}=(-3,\ -9,\ 6)$，$\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$

9．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ -8,\ -3)$，$\vec{b}=(x-2,\ -4,\ 3)$

(2)　$\vec{a}=(1,\ 2,\ x)$，$\vec{b}=(-x^2,\ 2,\ 3)$

10. 3 点 A$(2,\ 1,\ -3)$，B$(-1,\ 5,\ -2)$，C$(4,\ 3,\ -1)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，点 D の座標を求めよ。

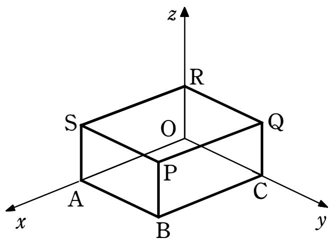
11. $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

12. 2 つのベクトルを $\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$ とする。

(1)　$\vec{c}=(x,\ y,\ 1)$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であるとき，x，y の値を求めよ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直で，大きさが 9 であるベクトル $\vec{d}$ を求めよ。

1．右の図において，点 P の座標が (4, 3, 2) のとき，直方体 OABC－RSPQ の O，P 以外の頂点の座標を求めよ。



解答　A : (4, 0, 0)，B : (4, 3, 0)，C : (0, 3, 0)，Q : (0, 3, 2)，R : (0, 0, 2)，S : (4, 0, 2)

解説
線分 PB，PQ，PS は，点 P からそれぞれ xy 平面，yz 平面，zx 平面に下ろした垂線である。また，線分 PA，PC，PR は，点 P からそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸に下ろした垂線である。

よって，点 A の座標は　(4, 0, 0)，　点 B の座標は　(4, 3, 0)，
点 C の座標は　(0, 3, 0)，　点 Q の座標は　(0, 3, 2)，
点 R の座標は　(0, 0, 2)，　点 S の座標は　(4, 0, 2)

2．原点 O と次の点の距離を求めよ。

(1)　(3, －2, 4)　　(2)　(－4, －5, 7)

解答　(1)　$\sqrt{29}$　　(2)　$3\sqrt{10}$

解説

(1)　$\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{29}$

(2)　$\sqrt{(-4)^2+(-5)^2+7^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

3．2 点 A (3, a, 1)，B (1, 4, －3) について，原点 O との距離が等しいとき，a の値を求めよ。

解答　$a=\pm4$

解説
OA＝OB であるから　　$OA^2=OB^2$

よって　　$3^2+a^2+1^2=1^2+4^2+(-3)^2$

ゆえに　$a^2=16$　　したがって　　$a=\pm4$

4．平行六面体 ABCD－EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AF}$　　(2)　$\overrightarrow{CE}$　　(3)　$\overrightarrow{GA}$

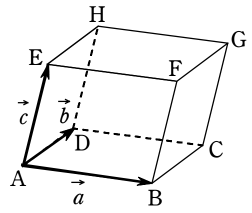
解答　(1)　$\vec{a}+\vec{c}$　　(2)　$-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　　(3)　$-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

解説

(1)　$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}+\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}$
$=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EA}=-\vec{a}+(-\vec{b})+(-\vec{c})$
$=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$



5．次のベクトルの大きさを求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 5,\ 1)$　　(2)　$\vec{p}=(1,\ -6,\ -2\sqrt{3})$

解答　(1)　$\sqrt{30}$　　(2)　7

解説

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+1^2}=\sqrt{30}$

(2)　$|\vec{p}|=\sqrt{1^2+(-6)^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{49}=7$

6．$\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$，$\vec{b}=(-3,\ 2,\ -1)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(3)　$-2\vec{b}$
(4)　$2\vec{a}+3\vec{b}$　　(5)　$-\vec{a}+2\vec{b}$　　(6)　$-2(3\vec{a}+8\vec{b})$

解答　(1)　(－2, 0, 2)　　(2)　(4, －4, 4)　　(3)　(6, －4, 2)　　(4)　(－7, 2, 3)　　(5)　(－7, 6, －5)　　(6)　(42, －20, －2)

解説

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -2,\ 3)+(-3,\ 2,\ -1)$
$=(1-3,\ -2+2,\ 3-1)$
$=(-2,\ 0,\ 2)$

(2)　$\vec{a}-\vec{b}=(1,\ -2,\ 3)-(-3,\ 2,\ -1)$
$=(1-(-3),\ -2-2,\ 3-(-1))$
$=(4,\ -4,\ 4)$

(3)　$-2\vec{b}=-2(-3,\ 2,\ -1)=(-2\times(-3),\ -2\times2,\ -2\times(-1))$
$=(6,\ -4,\ 2)$

(4)　$2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,\ -2,\ 3)+3(-3,\ 2,\ -1)$
$=(2,\ -4,\ 6)+(-9,\ 6,\ -3)$
$=(-7,\ 2,\ 3)$

(5)　$-\vec{a}+2\vec{b}=-(1,\ -2,\ 3)+2(-3,\ 2,\ -1)$
$=(-1,\ 2,\ -3)+(-6,\ 4,\ -2)$
$=(-7,\ 6,\ -5)$

(6)　$-2(3\vec{a}+8\vec{b})=-6\vec{a}-16\vec{b}=-6(1,\ -2,\ 3)-16(-3,\ 2,\ -1)$
$=(-6,\ 12,\ -18)+(48,\ -32,\ 16)$
$=(42,\ -20,\ -2)$

7．原点 O と 3 点 A (1, 2, 4)，B (－1, 2, 3)，C (0, －3, －2) について，次のベクトルを成分表示せよ。また，その大きさを求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}$　　(2)　$\overrightarrow{AC}$　　(3)　$\overrightarrow{CB}$

解答　(1)　(－2, 0, －1)，$\sqrt{5}$　　(2)　(－1, －5, －6)，$\sqrt{62}$
(3)　(－1, 5, 5)，$\sqrt{51}$

解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=(-1-1,\ 2-2,\ 3-4)$
$=(-2,\ 0,\ -1)$

よって　　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

(2)　$\overrightarrow{AC}=(0-1,\ -3-2,\ -2-4)$
$=(-1,\ -5,\ -6)$

よって　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-6)^2}=\sqrt{62}$

(3)　$\overrightarrow{CB}=(-1-0,\ 2-(-3),\ 3-(-2))$
$=(-1,\ 5,\ 5)$

よって　　$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+5^2}=\sqrt{51}$

8．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ \sqrt{6})$　　(2)　$\vec{a}=(2,\ 3,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ -3,\ 1)$
(3)　$\vec{a}=(-3,\ -9,\ 6)$，$\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$

解答　(1)　$-\sqrt{6}$，$\theta=120°$　　(2)　0，$\theta=90°$　　(3)　-42，$\theta=180°$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+1\times(-1)+(-1)\times\sqrt{6}=-\sqrt{6}$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{6})^2}}$
$=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=120°$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times2+3\times(-3)+5\times1=0$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=90°$

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3\times1+(-9)\times3+6\times(-2)=-42$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-42}{\sqrt{(-3)^2+(-9)^2+6^2}\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}$
$=\dfrac{-42}{3\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=-1$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=180°$

9．次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ -8,\ -3)$，$\vec{b}=(x-2,\ -4,\ 3)$

(2)　$\vec{a}=(1,\ 2,\ x)$，$\vec{b}=(-x^2,\ 2,\ 3)$

解答　(1)　$x=-\dfrac{19}{2}$　　(2)　$x=-1,\ 4$

解説

(1)　$\vec{a}\perp\vec{b}$ になるための条件は　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって　　$2\times(x-2)+(-8)\times(-4)+(-3)\times3=0$

これを解いて　　$x=-\dfrac{19}{2}$

(2)　$\vec{a}\perp\vec{b}$ になるための条件は　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって　　$1\times(-x^2)+2\times2+x\times3=0$

整理すると　　$x^2-3x-4=0$　　　　ゆえに　　$(x+1)(x-4)=0$

したがって　　$x=-1,\ 4$

10．3 点 A$(2,\ 1,\ -3)$，B$(-1,\ 5,\ -2)$，C$(4,\ 3,\ -1)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，点 D の座標を求めよ。

解答　$(7,\ -1,\ -2)$

解説

点 D の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から

$$(x-2,\ y-1,\ z-(-3))=(4-(-1),\ 3-5,\ -1-(-2))$$

よって　　$x-2=5,\ y-1=-2,\ z+3=1$

ゆえに　　$x=7,\ y=-1,\ z=-2$

したがって，点 D の座標は　　$(7,\ -1,\ -2)$

11．$\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

解答　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

解説

$$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 2,\ 3)+t(2,\ -1,\ 1)=(1+2t,\ 2-t,\ 3+t)$$

よって　　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1+2t)^2+(2-t)^2+(3+t)^2=6t^2+6t+14$

$$=6\left\{t^2+t+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+14=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{25}{2}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

よって　　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

12．2 つのベクトルを $\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$ とする。

(1)　$\vec{c}=(x,\ y,\ 1)$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であるとき，x，y の値を求めよ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直で，大きさが 9 であるベクトル $\vec{d}$ を求めよ。

解答　(1)　$x=2,\ y=2$　　(2)　$\vec{d}=(6,\ 6,\ 3),\ (-6,\ -6,\ -3)$

解説

(1)　$\vec{c}\perp\vec{a}$ から　　$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$x\cdot1+y\cdot(-2)+1\cdot2=0$　　　ゆえに　$x-2y+2=0$　……①

$\vec{c}\perp\vec{b}$ から　　$\vec{c}\cdot\vec{b}=0$

よって　$x\cdot2+y\cdot3+1\cdot(-10)=0$　　　ゆえに　$2x+3y-10=0$　……②

①，② を解いて　　$x=2,\ y=2$

(2)　(1) から　　$\vec{c}=(2,\ 2,\ 1)$

ここで　　$|\vec{c}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$

$\vec{d}$ は $\vec{c}$ に平行であり，$|\vec{d}|=9$ であるから　　$\vec{d}=\pm3\vec{c}$

よって　　$\vec{d}=(6,\ 6,\ 3),\ (-6,\ -6,\ -3)$