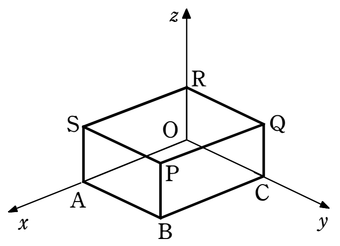
数学演習（空間ベクトル）Ｈ２４．１２．１０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. 右の図において，点 P の座標が (4, 3, 2) のとき，直方体 OABC−RSPQ の O，P 以外の頂点の座標を求めよ。



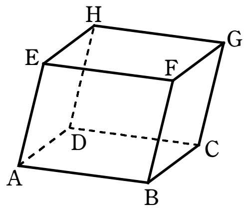
２. xy 平面，zx 平面，z 軸，原点のそれぞれについて，次の点と対称な点の座標を求めよ。

(1)　(1, 1, −1)　　　(2)　(2, −3, 4)

３. 原点 O と次の点の距離を求めよ。

(1)　(3, −2, 4)　　　(2)　(−4, −5, 7)

４. 平行六面体 ABCD−EFGH がある。各頂点を始点，終点とする有向線分で表されるベクトルのうち，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ に等しいものをそれぞれ求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の逆ベクトルを求めよ。



５. 平行六面体 ABCD−EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$　　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}$

６. 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 5,\ 1)$　　　(2)　$\vec{p}=(1,\ -6,\ -2\sqrt{3})$

７. $\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$，$\vec{b}=(-3,\ 2,\ -1)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$　　　(3)　$-2\vec{b}$

(4)　$2\vec{a}+3\vec{b}$　　　(5)　$-\vec{a}+2\vec{b}$　　　(6)　$-2(3\vec{a}+8\vec{b})$

８. 原点 O と 3 点 A (1, 2, 4)，B (−1, 2, 3)，C (0, −3, −2) について，次のベクトルを成分表示せよ。また，その大きさを求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

9. $\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，次のベクトルを適当な実数 s，t，u を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

(1) $\vec{d}=(11,\ 9,\ 4)$

(2) $\vec{e}=(-6,\ 8,\ 10)$

10. 3 点 A$(2,\ 1,\ -3)$，B$(-1,\ 5,\ -2)$，C$(4,\ 3,\ -1)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，点 D の座標を求めよ。

11. $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

12. 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ \sqrt{6})$

(2) $\vec{a}=(2,\ 3,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ -3,\ 1)$

(3) $\vec{a}=(-3,\ -9,\ 6)$，$\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$

13. 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

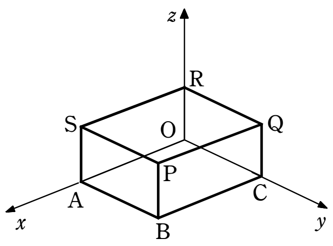
(1) $\vec{a}=(2,\ -8,\ -3)$，$\vec{b}=(x-2,\ -4,\ 3)$

(2) $\vec{a}=(1,\ 2,\ x)$，$\vec{b}=(-x^2,\ 2,\ 3)$

14. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトルを求めよ。

数学演習（空間ベクトル）Ｈ２４．１２．１０　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1． 右の図において，点 P の座標が $(4,\ 3,\ 2)$ のとき，直方体 OABC−RSPQ の O，P 以外の頂点の座標を求めよ。



解答　A：$(4,\ 0,\ 0)$，B：$(4,\ 3,\ 0)$，C：$(0,\ 3,\ 0)$，Q：$(0,\ 3,\ 2)$，R：$(0,\ 0,\ 2)$，S：$(4,\ 0,\ 2)$

線分 PB，PQ，PS は，点 P からそれぞれ xy 平面，yz 平面，zx 平面に下ろした垂線である。また，線分 PA，PC，PR は，点 P からそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸に下ろした垂線である。

よって，点 A の座標は　$(4,\ 0,\ 0)$，　点 B の座標は　$(4,\ 3,\ 0)$，
点 C の座標は　$(0,\ 3,\ 0)$，　点 Q の座標は　$(0,\ 3,\ 2)$，
点 R の座標は　$(0,\ 0,\ 2)$，　点 S の座標は　$(4,\ 0,\ 2)$

2． xy 平面，zx 平面，z 軸，原点のそれぞれについて，次の点と対称な点の座標を求めよ。

(1)　$(1,\ 1,\ -1)$　　(2)　$(2,\ -3,\ 4)$

解答　xy 平面，zx 平面，z 軸，原点の順に
(1)　$(1,\ 1,\ 1)$，$(1,\ -1,\ -1)$，$(-1,\ -1,\ -1)$，$(-1,\ -1,\ 1)$
(2)　$(2,\ -3,\ -4)$，$(2,\ 3,\ 4)$，$(-2,\ 3,\ 4)$，$(-2,\ 3,\ -4)$

(1)　xy 平面について対称な点は　$(1,\ 1,\ 1)$
zx 平面について対称な点は　$(1,\ -1,\ -1)$
z 軸について対称な点は　$(-1,\ -1,\ -1)$
原点について対称な点は　$(-1,\ -1,\ 1)$
(2)　xy 平面について対称な点は　$(2,\ -3,\ -4)$
zx 平面について対称な点は　$(2,\ 3,\ 4)$
z 軸について対称な点は　$(-2,\ 3,\ 4)$
原点について対称な点は　$(-2,\ 3,\ -4)$

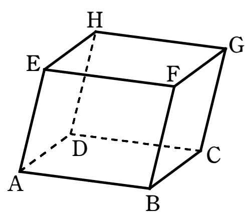
3． 原点 O と次の点の距離を求めよ。

(1)　$(3,\ -2,\ 4)$　　(2)　$(-4,\ -5,\ 7)$

解答　(1)　$\sqrt{29}$　　(2)　$3\sqrt{10}$

(1)　$\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{29}$
(2)　$\sqrt{(-4)^2+(-5)^2+7^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

4． 平行六面体 ABCD−EFGH がある。各頂点を始点，終点とする有向線分で表されるベクトルのうち，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{GE}$ に等しいものをそれぞれ求めよ。また，$\overrightarrow{AE}$ の逆ベクトルを求めよ。



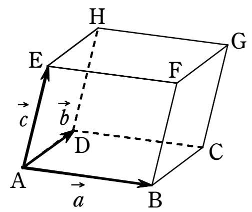
解答　$\overrightarrow{BC}$ に等しいベクトル：$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{FG}$
$\overrightarrow{GE}$ に等しいベクトル：$\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AE}$ の逆ベクトル：$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{GC}$，$\overrightarrow{HD}$

$\overrightarrow{BC}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{FG}$
$\overrightarrow{GE}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AE}$ の逆ベクトルは　$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{GC}$，$\overrightarrow{HD}$

5． 平行六面体 ABCD−EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AF}$　　(2)　$\overrightarrow{CE}$　　(3)　$\overrightarrow{GA}$

解答　(1)　$\vec{a}+\vec{c}$　　(2)　$-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　　(3)　$-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$



(1)　$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}+\vec{c}$
(2)　$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}$
$=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
(3)　$\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EA}=-\vec{a}+(-\vec{b})+(-\vec{c})$
$=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

6． 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 5,\ 1)$　　(2)　$\vec{p}=(1,\ -6,\ -2\sqrt{3})$

解答　(1)　$\sqrt{30}$　　(2)　7

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+1^2}=\sqrt{30}$
(2)　$|\vec{p}|=\sqrt{1^2+(-6)^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{49}=7$

7． $\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$，$\vec{b}=(-3,\ 2,\ -1)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(3)　$-2\vec{b}$
(4)　$2\vec{a}+3\vec{b}$　　(5)　$-\vec{a}+2\vec{b}$　　(6)　$-2(3\vec{a}+8\vec{b})$

解答　(1)　$(-2,\ 0,\ 2)$　　(2)　$(4,\ -4,\ 4)$　　(3)　$(6,\ -4,\ 2)$　　(4)　$(-7,\ 2,\ 3)$
(5)　$(-7,\ 6,\ -5)$　　(6)　$(42,\ -20,\ -2)$

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -2,\ 3)+(-3,\ 2,\ -1)$
$=(1-3,\ -2+2,\ 3-1)$
$=(-2,\ 0,\ 2)$
(2)　$\vec{a}-\vec{b}=(1,\ -2,\ 3)-(-3,\ 2,\ -1)$
$=(1-(-3),\ -2-2,\ 3-(-1))$
$=(4,\ -4,\ 4)$
(3)　$-2\vec{b}=-2(-3,\ 2,\ -1)=(-2\times(-3),\ -2\times 2,\ -2\times(-1))$
$=(6,\ -4,\ 2)$
(4)　$2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,\ -2,\ 3)+3(-3,\ 2,\ -1)$
$=(2,\ -4,\ 6)+(-9,\ 6,\ -3)$
$=(-7,\ 2,\ 3)$
(5)　$-\vec{a}+2\vec{b}=-(1,\ -2,\ 3)+2(-3,\ 2,\ -1)$
$=(-1,\ 2,\ -3)+(-6,\ 4,\ -2)$
$=(-7,\ 6,\ -5)$
(6)　$-2(3\vec{a}+8\vec{b})=-6\vec{a}-16\vec{b}=-6(1,\ -2,\ 3)-16(-3,\ 2,\ -1)$
$=(-6,\ 12,\ -18)+(48,\ -32,\ 16)$
$=(42,\ -20,\ -2)$

8． 原点 O と 3 点 A$(1,\ 2,\ 4)$，B$(-1,\ 2,\ 3)$，C$(0,\ -3,\ -2)$ について，次のベクトルを成分表示せよ。また，その大きさを求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}$　　(2)　$\overrightarrow{AC}$　　(3)　$\overrightarrow{CB}$

解答　(1)　$(-2,\ 0,\ -1)$，$\sqrt{5}$　　(2)　$(-1,\ -5,\ -6)$，$\sqrt{62}$
(3)　$(-1,\ 5,\ 5)$，$\sqrt{51}$

(1)　$\overrightarrow{AB}=(-1-1,\ 2-2,\ 3-4)$
$=(-2,\ 0,\ -1)$
よって　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$
(2)　$\overrightarrow{AC}=(0-1,\ -3-2,\ -2-4)$
$=(-1,\ -5,\ -6)$
よって　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-6)^2}=\sqrt{62}$
(3)　$\overrightarrow{CB}=(-1-0,\ 2-(-3),\ 3-(-2))$
$=(-1,\ 5,\ 5)$
よって　$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+5^2}=\sqrt{51}$

9. $\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，次のベクトルを適当な実数 s，t，u を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

(1) $\vec{d}=(11,\ 9,\ 4)$　　(2) $\vec{e}=(-6,\ 8,\ 10)$

解答 (1) $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$　　(2) $\vec{e}=12\vec{a}+\frac{6}{5}\vec{b}-\frac{8}{5}\vec{c}$

$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s(0,\ 1,\ 1)+t(-1,\ 2,\ -3)+u(3,\ 4,\ -1)$

$=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$

(1) $\vec{d}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とすると

$(11,\ 9,\ 4)=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$

よって　$-t+3u=11$ …… ①，$s+2t+4u=9$ …… ②，$s-3t-u=4$ …… ③

②−③ から　$t+u=1$ …… ④

①，④ を解いて　$t=-2$，$u=3$

ゆえに，③ から　$s+6-3=4$　　よって　$s=1$

したがって　$\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$

(2) $\vec{e}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とすると

$(-6,\ 8,\ 10)=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$

よって　$-t+3u=-6$ …… ①，$s+2t+4u=8$ …… ②，$s-3t-u=10$ …… ③

②−③ から　$5t+5u=-2$ …… ④

①，④ を解いて　$t=\frac{6}{5}$，$u=-\frac{8}{5}$

ゆえに，③ から　$s-\frac{18}{5}+\frac{8}{5}=10$　　よって　$s=12$

したがって　$\vec{e}=12\vec{a}+\frac{6}{5}\vec{b}-\frac{8}{5}\vec{c}$

10. 3 点 A$(2,\ 1,\ -3)$，B$(-1,\ 5,\ -2)$，C$(4,\ 3,\ -1)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，点 D の座標を求めよ。

解答 $(7,\ -1,\ -2)$

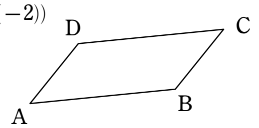
点 D の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から

$(x-2,\ y-1,\ z-(-3))=(4-(-1),\ 3-5,\ -1-(-2))$

よって　$x-2=5$，$y-1=-2$，$z+3=1$

ゆえに　$x=7$，$y=-1$，$z=-2$

したがって，点 D の座標は　$(7,\ -1,\ -2)$



11. $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

解答 $t=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{5}{\sqrt{2}}$

$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 2,\ 3)+t(2,\ -1,\ 1)=(1+2t,\ 2-t,\ 3+t)$

よって　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1+2t)^2+(2-t)^2+(3+t)^2=6t^2+6t+14$

$=6\left\{t^2+t+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+14=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$

ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{25}{2}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}}$

であるから，$|\vec{a}+t\vec{b}|$　は　$t=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

12. 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ \sqrt{6})$　　(2) $\vec{a}=(2,\ 3,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ -3,\ 1)$

(3) $\vec{a}=(-3,\ -9,\ 6)$，$\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$

解答 (1) $-\sqrt{6}$，$\theta=120°$　(2) 0，$\theta=90°$　(3) -42，$\theta=180°$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+1\times(-1)+(-1)\times\sqrt{6}=-\sqrt{6}$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{6})^2}}$

$=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times2+3\times(-3)+5\times1=0$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=90°$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3\times1+(-9)\times3+6\times(-2)=-42$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-42}{\sqrt{(-3)^2+(-9)^2+6^2}\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}$

$=\frac{-42}{3\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=-1$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=180°$

13. 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ -8,\ -3)$，$\vec{b}=(x-2,\ -4,\ 3)$

(2) $\vec{a}=(1,\ 2,\ x)$，$\vec{b}=(-x^2,\ 2,\ 3)$

解答 (1) $x=-\frac{19}{2}$　(2) $x=-1,\ 4$

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ になるための条件は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって　$2\times(x-2)+(-8)\times(-4)+(-3)\times3=0$

これを解いて　$x=-\frac{19}{2}$

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}$ になるための条件は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって　$1\times(-x^2)+2\times2+x\times3=0$

整理すると　$x^2-3x-4=0$　　ゆえに　$(x+1)(x-4)=0$

したがって　$x=-1,\ 4$

14. ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 のベクトルを求めよ。

解答 $\left(\frac{4\sqrt{21}}{7},\ \frac{\sqrt{21}}{7},\ -\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)$ または $\left(-\frac{4\sqrt{21}}{7},\ -\frac{\sqrt{21}}{7},\ \frac{2\sqrt{21}}{7}\right)$

求めるベクトルを $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{c}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$　　よって　$x+2y+3z=0$ …… ①

$\vec{b}\perp\vec{c}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　よって　$x-2y+z=0$ …… ②

$|\vec{c}|=3$ であるから　$|\vec{c}|^2=3^2$　　よって　$x^2+y^2+z^2=9$ …… ③

①−②×3 から　$x=4y$ …… ④　　④を①に代入して　$z=-2y$ …… ⑤

④，⑤ を ③ に代入して　$(4y)^2+y^2+(-2y)^2=9$　　ゆえに　$y^2=\frac{3}{7}$

したがって　$y=\pm\frac{\sqrt{21}}{7}$

このとき，④，⑤ から　$y=\frac{\sqrt{21}}{7}$ のとき　$x=\frac{4\sqrt{21}}{7}$，$z=-\frac{2\sqrt{21}}{7}$

$y=-\frac{\sqrt{21}}{7}$ のとき　$x=-\frac{4\sqrt{21}}{7}$，$z=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

よって，求めるベクトルは

$\left(\frac{4\sqrt{21}}{7},\ \frac{\sqrt{21}}{7},\ -\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)$ または $\left(-\frac{4\sqrt{21}}{7},\ -\frac{\sqrt{21}}{7},\ \frac{2\sqrt{21}}{7}\right)$