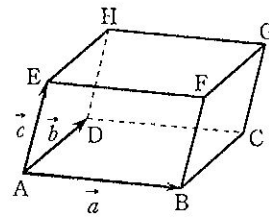


- [1] 右の図の平行六面体において、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

- (1) $\overrightarrow{EG}$ (2) $\overrightarrow{CF}$ (3) $\overrightarrow{GA}$



- [2] $\vec{a}=(2x+3, 4, z-1)$, $\vec{b}=(-x, y^2, 5)$ が等しくなるように、 x, y, z の値を定めよ。

- [3] $\vec{a}=(1, 1, 1)$, $\vec{b}=(2, -1, 1)$, $\vec{c}=(-1, 3, 2)$ とする。 $\vec{p}=(4, -6, -1)$ を、適当な実数 s, t, u を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

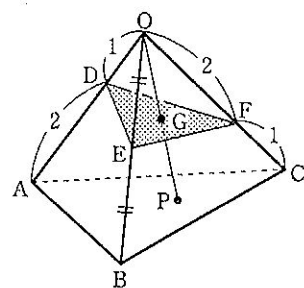
- [4] $\vec{a}=(1, 1, 2)$, $\vec{b}=(2, -1, 1)$ と実数 t に対して、 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。

- [5] 3点 A(2, 1, 2), B(4, 3, 6), C(4, 1, 4) を頂点とする $\triangle ABC$ において、 $\angle BAC$ の大きさ θ を求めよ。

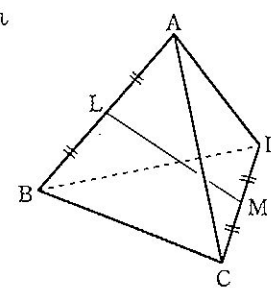
- [6] $\vec{p}=(k, -k, 1)$, $\vec{q}=(k, 1, -2)$ が垂直であるとき、定数 k の値を求めよ。

- [7] $\vec{a}=(2, 1, 0)$, $\vec{b}=(-2, 1, 2)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

- 8 四面体 $OABC$ において、辺 OA を $1:2$ に内分する点を D 、辺 OB の中点を E 、辺 OC を $2:1$ に内分する点を F とする。更に、 $\triangle DEF$ の重心を G とし、直線 OG と平面 ABC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。



- 9 正四面体 $ABCD$ において、辺 AB 、 CD の中点をそれぞれ L 、 M とする。このとき、 $\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{CD}$ を求めよ。

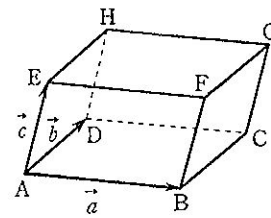


- 10 点 $A(-2, 0, 1)$ を中心とし、点 $B(2, 4, 3)$ を通る球面の方程式を求めよ。

- 11 2 点 $A(-1, -2, 3)$ 、 $B(1, 4, -5)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

- [1] 右の図の平行六面体において、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

- (1) $\overrightarrow{EG}$ (2) $\overrightarrow{CF}$ (3) $\overrightarrow{GA}$



解説

- (1) $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$ (4)
 (2) $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\vec{c}-\vec{b}$ (4)
 (3) $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ (4)

- [2] $\vec{a}=(2x+3, 4, z-1)$, $\vec{b}=(-x, y^2, 5)$ が等しくなるように、 x, y, z の値を定めよ。

解説

$\vec{a}=\vec{b}$ とすると $(2x+3, 4, z-1)=(-x, y^2, 5)$
 よって $2x+3=-x, 4=y^2, z-1=5$
 これを解いて $x=-1, y=\pm 2, z=6$ (8)

- [3] $\vec{a}=(1, 1, 1)$, $\vec{b}=(2, -1, 1)$, $\vec{c}=(-1, 3, 2)$ とする。 $\vec{p}=(4, -6, -1)$ を、適当な実数 s, t, u を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

解説

$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s(1, 1, 1)+t(2, -1, 1)+u(-1, 3, 2)$
 $= (s+2t-u, s-t+3u, s+t+2u)$
 $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とすると $(4, -6, -1)=(s+2t-u, s-t+3u, s+t+2u)$
 よって $4=s+2t-u$ ①, $-6=s-t+3u$ ②, $-1=s+t+2u$ ③
 ①-② から $10=3t-4u$ ④
 ①-③ から $5=t-3u$ ⑤
 ④, ⑤ を解くと $t=2, u=-1$
 $t=2, u=-1$ を ① に代入して $4=s+4-1$ よって $s=-1$
 したがって $\vec{p}=-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ (10)

- [4] $\vec{a}=(1, 1, 2)$, $\vec{b}=(2, -1, 1)$ と実数 t に対して、 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。

解説

$\vec{a}+t\vec{b}=(1, 1, 2)+t(2, -1, 1)=(1+2t, 1-t, 2+t)$
 よって $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1+2t)^2+(1-t)^2+(2+t)^2=6t^2+6t+6$
 $=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$
 ゆえに、 $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。
 $|\vec{a}+t\vec{b}| \geq 0$ であるから、 $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小になる。
 したがって、 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-\frac{1}{2}$ で最小値 $\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ をとる。 (10)

- [5] 3点 A(2, 1, 2), B(4, 3, 6), C(4, 1, 4) を頂点とする $\triangle ABC$ において、 $\angle BAC$ の大きさ θ を求めよ。

解説

$\overrightarrow{AB}=(4-2, 3-1, 6-2)=(2, 2, 4)$
 $\overrightarrow{AC}=(4-2, 1-1, 4-2)=(2, 0, 2)$
 よって $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$,
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=2 \times 2 + 2 \times 0 + 4 \times 2=12$
 したがって $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12}{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 30^\circ$ (10)

- [6] $\vec{p}=(k, -k, 1)$, $\vec{q}=(k, 1, -2)$ が垂直であるとき、定数 k の値を求めよ。

解説

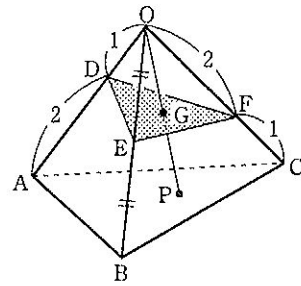
$\vec{p} \cdot \vec{q} = k \times k + (-k) \times 1 + 1 \times (-2) = k^2 - k - 2 = (k+1)(k-2)$
 よって $(k+1)(k-2)=0$ したがって $k=-1, 2$ (8)

- [7] $\vec{a}=(2, 1, 0)$, $\vec{b}=(-2, 1, 2)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

解説

求めるベクトルを $\vec{e}=(x, y, z)$ とする。
 $\vec{a} \perp \vec{e}$ であるから $\vec{a} \cdot \vec{e}=0$ よって $2x+y=0$ ①
 $\vec{b} \perp \vec{e}$ であるから $\vec{b} \cdot \vec{e}=0$ よって $-2x+y+2z=0$ ②
 $|\vec{e}|=1$ であるから $|\vec{e}|^2=1$ よって $x^2+y^2+z^2=1$ ③
 ①, ② から $y=-2x, z=2x$ ④
 これを ③ に代入すると $9x^2=1$ ゆえに $x=\pm \frac{1}{3}$
 ④ から $x=\frac{1}{3}$ のとき $y=-\frac{2}{3}, z=\frac{2}{3}$; $x=-\frac{1}{3}$ のとき $y=\frac{2}{3}, z=-\frac{2}{3}$
 よって、求めるベクトルは $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (10)

- 8 四面体 OABC において、辺 OA を 1:2 に内分する点を D、辺 OB の中点を E、辺 OC を 2:1 に内分する点を F とする。更に、 $\triangle DEF$ の重心を G とし、直線 OG と平面 ABC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



解説

$$\text{条件から } \overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{a}, \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

点 P は直線 OG 上にあるから、 $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$ とおける

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}=k\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)=\frac{1}{9}k\vec{a}+\frac{1}{6}k\vec{b}+\frac{2}{9}k\vec{c} \quad \dots\dots ①$$

また、点 P は平面 ABC 上にあるから、 $\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ とおける

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \vec{c} + s(\vec{a}-\vec{c}) + t(\vec{b}-\vec{c}) \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いた表し方はただ 1 通りであるから、①、② により

$$s=\frac{1}{9}k, t=\frac{1}{6}k, 1-s-t=\frac{2}{9}k$$

$$s, t \text{ を消去すると } 1-\frac{1}{9}k-\frac{1}{6}k=\frac{2}{9}k \quad \text{これを解くと} \quad k=2$$

$$\text{これを ① に代入して } \overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$$

10

参考 3 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) で定まる平面 ABC 上に点 P があるとき、点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は次のように表される。

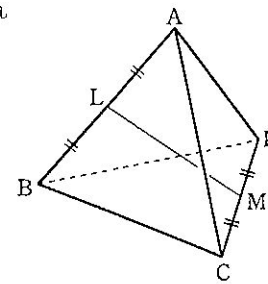
$$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c} \quad \text{ただし、} s+t+u=1$$

このことを用いると、本問は次のように解くことができる。

$$\text{点 P は平面 ABC 上にあるから、① より } \frac{1}{9}k+\frac{1}{6}k+\frac{2}{9}k=1$$

$$\text{これを解くと } k=2 \quad \text{よって } \overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$$

- 9 正四面体 ABCD において、辺 AB, CD の中点をそれぞれ L, M とする。このとき、 $\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{CD}$ を求めよ。



解説

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

$$\text{条件から } \overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{AM}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$$

$$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AL}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\vec{d}-\vec{c}$$

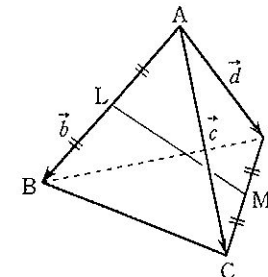
$$\begin{aligned} \text{よって } \overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{CD} &= \frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2} \cdot (\vec{d}-\vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}\{(\vec{d}+\vec{c}) \cdot (\vec{d}-\vec{c}) - \vec{b} \cdot (\vec{d}-\vec{c})\} \\ &= \frac{1}{2}\{|\vec{d}|^2 - |\vec{c}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c}\} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

正四面体 ABCD の 1 辺の長さを a とすると

$$|\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2=a^2, \quad \vec{b} \cdot \vec{d}=|\vec{b}||\vec{d}|\cos 60^\circ=a \cdot a \cdot \frac{1}{2}=\frac{a^2}{2},$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=a \cdot a \cdot \frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$$

$$\text{よって、① により } \overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(a^2-a^2-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right)=0$$



10

- 10 点 A(-2, 0, 1) を中心とし、点 B(2, 4, 3) を通る球面の方程式を求めよ。

解説

$$\text{球面の半径は } AB=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{4-0\}^2+\{3-1\}^2}=\sqrt{36}=6$$

$$\text{よって、求める球面の方程式は } \{x-(-2)\}^2+\{y-0\}^2+\{z-1\}^2=6^2$$

$$\text{すなわち } (x+2)^2+y^2+(z-1)^2=36$$

6

- 11 2 点 A(-1, -2, 3), B(1, 4, -5) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

解説

線分 AB の中点を C とすると、この球面の中心は点 C で、半径は線分 CA の長さである。点 C の座標は

$$\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-5)}{2}\right) \quad \text{すなわち } (0, 1, -1)$$

$$\text{よって } CA=\sqrt{(-1-0)^2+(-2-1)^2+\{3-(-1)\}^2}=\sqrt{26}$$

$$\text{したがって、求める球面の方程式は } (x-0)^2+(y-1)^2+\{z-(-1)\}^2=(\sqrt{26})^2$$

$$\text{すなわち } x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=26$$

6