数学演習（空間ベクトル）Ｈ２４．１２．１０　　　　(　)組(　)番　名前(　　　　)

１．3 点 A $(-3,\ 1,\ 2)$，B $(-2,\ 3,\ 1)$，C $(-1,\ 2,\ 3)$ を頂点とする △ABC において，次のものを求めよ。

(1) ∠ABC の大きさ　　(2) △ABC の面積

２．空間における 3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) 線分 AB を 4 : 1 に内分する点 D　　(2) 線分 BC を 3 : 2 に外分する点 E

(3) 線分 AC の中点 M　　(4) △ABM の重心 G

３．3 点 A $(2,\ -1,\ 3)$，B $(3,\ 2,\ 1)$，C $(a,\ b,\ 5)$ が一直線上にあるように，a，b の値を定めよ。

４．2 点 A $(3,\ 4,\ 6)$，B $(6,\ 3,\ 9)$ と xy 平面上の点 C が一直線上にあるとき，点 C の座標を求めよ。

５．四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 AB の中点を M，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を N，△OAB の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{MN}$　　(2) $\overrightarrow{GN}$

６．原点 O と 2 点 A $(1,\ 0,\ 2)$，B $(0,\ 2,\ 3)$ がある。点 P $(1,\ 2,\ z)$ が平面 OAB 上にあるとき，z の値を求めよ。

７．平行六面体 OADB−CEGF において，辺 DG の G を越える延長上に GM=2GD となるように点 M をとり，直線 OM と平面 ABC の交点をN とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

8．四面体 OABC において，△ABC の重心を G，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を D，辺 OC を 2 : 3 に内分する点を E とする。直線 OG と平面 DBE の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ で表せ。また，OP : OG を求めよ。

9．点 (2，−3，5) を通る，次のような平面の方程式を求めよ。

(1)　xy 平面，yz 平面，zx 平面にそれぞれ平行な平面

(2)　x 軸，y 軸，z 軸にそれぞれ垂直な平面

10．3 点 A (2，−3，0)，B (5，1，5)，C (8，−1，1) について，2 点 A，B 間，および B，C 間の距離をそれぞれ求めよ。また，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を 2 : 3 に内分する点，外分する点

(2)　線分 BC の中点　　　(3)　△ABC の重心

11．次のような球面の方程式を求めよ。

(1)　原点を中心とする半径 2 の球面

(2)　点 (3，−2，1) を中心とする半径 1 の球面

(3)　点 A (1，2，−1) を中心とし，点 B (3，−1，3) を通る球面

(4)　直径の両端が 2 点 A (1，−2，3)，B (−3，−6，−1) である球面

(5)　点 (2，−1，0) で xy 平面に接する半径 3 の球面

12．方程式 $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z+5=0$ …… ① について

(1)　① は $\left(x+{}^{ア}\boxed{}\right)^2+\left(y-{}^{イ}\boxed{}\right)^2+\left(z-{}^{ウ}\boxed{}\right)^2={}^{エ}\boxed{}$ と変形できる。

(2)　① はどのような図形を表すか。

13．球面 $(x+2)^2+(y-5)^2+(z-8)^2=10^2$ と，次の座標平面または平面が交わる部分は円を表す。その中心の座標と半径を求めよ。

(1)　xy 平面　　(2)　zx 平面　　(3)　$z=2$　　(4)　$x=-6$

1．3 点 A$(-3,\ 1,\ 2)$，B$(-2,\ 3,\ 1)$，C$(-1,\ 2,\ 3)$ を頂点とする △ABC において，次のものを求めよ。

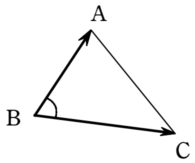
(1)　∠ABC の大きさ　　　(2)　△ABC の面積

解答　(1)　60°　　(2)　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解説

(1)　$\overrightarrow{BA}=(-3-(-2),\ 1-3,\ 2-1)=(-1,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{BC}=(-1-(-2),\ 2-3,\ 3-1)=(1,\ -1,\ 2)$



よって　$\cos\angle ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$

$=\dfrac{-1\times1+(-2)\times(-1)+1\times2}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\angle ABC\leqq180°$ であるから　　$\angle ABC=60°$

(2)　求める面積は

$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\sin60°=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2．空間における 3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　線分 AB を 4 : 1 に内分する点 D　　(2)　線分 BC を 3 : 2 に外分する点 E

(3)　線分 AC の中点 M　　(4)　△ABM の重心 G

解答　(1)　$\dfrac{\vec{a}+4\vec{b}}{5}$　　(2)　$-2\vec{b}+3\vec{c}$　　(3)　$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$　　(4)　$\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{6}$

解説

点 D，E，M，G の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{m}$，$\vec{g}$ とすると

(1)　$\vec{d}=\dfrac{1\cdot\vec{a}+4\vec{b}}{4+1}=\dfrac{\vec{a}+4\vec{b}}{5}$　　（内分の公式）

(2)　$\vec{e}=\dfrac{-2\vec{b}+3\vec{c}}{3-2}=-2\vec{b}+3\vec{c}$　　（外分の公式）

(3)　$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$

(4)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{m}}{3}$　　（重心の公式）

$=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right)=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{6}$

3．3 点 A$(2,\ -1,\ 3)$，B$(3,\ 2,\ 1)$，C$(a,\ b,\ 5)$ が一直線上にあるように，a，b の値を定めよ。

解答　$a=1$，$b=-4$

解説

$\overrightarrow{AB}=(3-2,\ 2-(-1),\ 1-3)=(1,\ 3,\ -2)$

$\overrightarrow{AC}=(a-2,\ b-(-1),\ 5-3)=(a-2,\ b+1,\ 2)$

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k があるから　　$(a-2,\ b+1,\ 2)=k(1,\ 3,\ -2)$

よって　$a-2=k$ ……①，　$b+1=3k$ ……②，　$2=-2k$ ……③

③ から　$k=-1$　　　したがって，①，② から　$a=1$，$b=-4$

4．2 点 A$(3,\ 4,\ 6)$，B$(6,\ 3,\ 9)$ と xy 平面上の点 C が一直線上にあるとき，点 C の座標を求めよ。

解答　$(-3,\ 6,\ 0)$

解説

点 C は xy 平面上にあるから，その座標を $(x,\ y,\ 0)$ とおく。

3 点 A，B，C は一直線上にあるから，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

ここで　$\overrightarrow{AB}=(6-3,\ 3-4,\ 9-6)=(3,\ -1,\ 3)$

$\overrightarrow{AC}=(x-3,\ y-4,\ 0-6)=(x-3,\ y-4,\ -6)$

よって　$(x-3,\ y-4,\ -6)=(3k,\ -k,\ 3k)$

ゆえに　$x-3=3k$ ……①，　$y-4=-k$ ……②，　$-6=3k$ ……③

③ から　$k=-2$

よって，①，② から　$x=-3$，$y=6$

したがって，点 C の座標は　$(-3,\ 6,\ 0)$

5．四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 AB の中点を M，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を N，△OAB の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{MN}$　　　(2)　$\overrightarrow{GN}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$　　(2)　$-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{12}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$

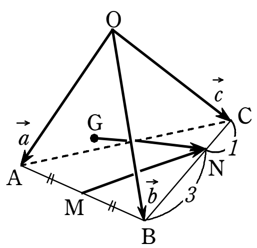
解説

(1)　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{3+1}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

$=\dfrac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{4}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$

$=\dfrac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{12}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$



6．原点 O と 2 点 A$(1,\ 0,\ 2)$，B$(0,\ 2,\ 3)$ がある。点 P$(1,\ 2,\ z)$ が平面 OAB 上にあるとき，z の値を求めよ。

解答　$z=5$

解説

点 P が平面 OAB 上にあるとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ となる実数 s，t がある。

よって　$(1,\ 2,\ z)=s(1,\ 0,\ 2)+t(0,\ 2,\ 3)$

ゆえに　$(1,\ 2,\ z)=(s,\ 2t,\ 2s+3t)$

したがって　$1=s$，$2=2t$ ……①，　$z=2s+3t$ ……②

① から　$t=1$

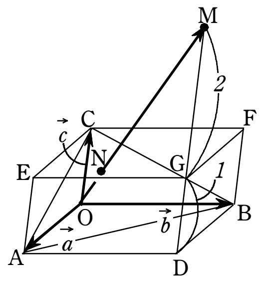
$s=1$，$t=1$ を ② に代入して　$z=2+3=5$

7．平行六面体 OADB−CEGF において，辺 DG の G を越える延長上に GM=2GD となるように点 M をとり，直線 OM と平面 ABC の交点を N とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

解説

点 N は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{AN}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t がある。



よって　$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}$　と考えると

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+t(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})$

$=\overrightarrow{OA}+s(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+t(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$

$=\vec{a}+s(-\vec{a}+\vec{b})+t(-\vec{a}+\vec{c})$

$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

ゆえに　$\overrightarrow{ON}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ ……①

また，点 N は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ となる実数 k がある。

ここで　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{ON}=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$ ……②

ゆえに　①,②より 4 点 O，A，B，C は同じ平面上になく，

$\overrightarrow{ON}$ の表し方はただ 1 通りなので,$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数をそれぞれ比較して

$1-s-t=k$ ……③，　$s=k$ ……④，　$t=3k$ ……⑤

④，⑤ を ③ に代入すると　$1-k-3k=k$　　よって　$k=\dfrac{1}{5}$

したがって②に代入して　$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

別解　点 N は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{ON}=k(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$

点 N は平面 ABC 上にあるから,係数を足して 1 になるので　$k+k+3k=1$

ゆえに　$k=\dfrac{1}{5}$　　したがって　$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

注意　点 P が平面 ABC 上にある

$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$（$s$，$t$，$u$ は実数）

つまり

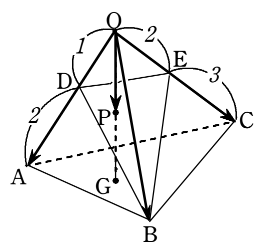
（$\overrightarrow{OA}$の係数）＋（$\overrightarrow{OB}$の係数）＋（$\overrightarrow{OC}$の係数）＝１

8．四面体 OABC において，△ABC の重心を G，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を D，辺 OC を 2 : 3 に内分する点を E とする。直線 OG と平面 DBE の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ で表せ。また，OP : OG を求めよ。

解答　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{13}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{13}\overrightarrow{OB}+\dfrac{2}{13}\overrightarrow{OC}$　，　OP : OG =6 : 13

解説

点 P は平面 DBE 上にあるから，$\overrightarrow{DP}=s\overrightarrow{DB}+t\overrightarrow{DE}$ となる実数 s，t がある。



よって　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}$

$=\overrightarrow{OD}+(s\overrightarrow{DB}+t\overrightarrow{DE})$

$=\overrightarrow{OD}+s(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB})+t(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OE})$

$=\overrightarrow{OD}+s(-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})+t(-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})$

展開して整理して

$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OE}$

$=(1-s-t)\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\cdot\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{1-s-t}{3}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+\dfrac{2}{5}t\overrightarrow{OC}$ …①

また，点 P は直線 OG 上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=k\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right)=\dfrac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{k}{3}\overrightarrow{OC}$ …②

ゆえに①，②から　$\dfrac{1-s-t}{3}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+\dfrac{2}{5}t\overrightarrow{OC}=\dfrac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{k}{3}\overrightarrow{OC}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上になく,$\overrightarrow{OP}$ の表し方は 1 通りであるから

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$　それぞれの係数を比較して

$\dfrac{1-s-t}{3}=\dfrac{k}{3}$　，　$s=\dfrac{k}{3}$，$\dfrac{2}{5}t=\dfrac{k}{3}$

が成り立つ。ここで$\dfrac{2}{5}t=\dfrac{k}{3}$を

$t=\dfrac{5}{6}k$と変形して,$s=\dfrac{k}{3}$と$t=\dfrac{5}{6}k$　を　$\dfrac{1-s-t}{3}=\dfrac{k}{3}$に代入する

先に両辺を3倍して　$1-s-t=k$としてから代入すると

$1-\dfrac{k}{3}-\dfrac{5}{6}k=k$　　よって　　$k=\dfrac{6}{13}$

これを②に代入すると　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{13}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{13}\overrightarrow{OB}+\dfrac{2}{13}\overrightarrow{OC}$

また，$k=\dfrac{6}{13}$　を　$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$　に代入すると

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{6}{13}\overrightarrow{OG}$ であるから　　OP : OG$=6:13$

9．点 (2，−3，5) を通る，次のような平面の方程式を求めよ。

(1)　xy 平面，yz 平面，zx 平面にそれぞれ平行な平面

(2)　x 軸，y 軸，z 軸にそれぞれ垂直な平面

解答　(1)　xy 平面：$z=5$，yz 平面：$x=2$，zx 平面：$y=-3$

(2)　x 軸：$x=2$，y 軸：$y=-3$，z 軸：$z=5$

解説

(1)　xy 平面に平行な平面は　　$z=5$

yz 平面に平行な平面は　　$x=2$

zx 平面に平行な平面は　　$y=-3$

(2)　x 軸に垂直な平面は，yz 平面に平行であるから　　$x=2$

y 軸に垂直な平面は，zx 平面に平行であるから　　$y=-3$

z 軸に垂直な平面は，xy 平面に平行であるから　　$z=5$

参考　その平面上に乗っているすべての点の z 座標が 5 であるとき，その平面を $z=5$ と表す。

10．3 点 A (2，−3，0)，B (5，1，5)，C (8，−1，1) について，2 点 A，B 間，および B，C 間の距離をそれぞれ求めよ。また，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を 2 : 3 に内分する点，外分する点

(2)　線分 BC の中点　　　　　　(3)　△ABC の重心

解答　A，B 間の距離 $5\sqrt{2}$；B，C 間の距離 $\sqrt{29}$

(1)　内分 $\left(\dfrac{16}{5},\ -\dfrac{7}{5},\ 2\right)$，外分 $(-4,\ -11,\ -10)$

(2)　$\left(\dfrac{13}{2},\ 0,\ 3\right)$　　　(3)　$(5,\ -1,\ 2)$

解説

<すべて、公式より導かれる>

$AB=\sqrt{(5-2)^2+\{1-(-3)\}^2+(5-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{(8-5)^2+(-1-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{29}$

(1)　内分：$\left(\dfrac{3\cdot2+2\cdot5}{2+3},\ \dfrac{3\cdot(-3)+2\cdot1}{2+3},\ \dfrac{3\cdot0+2\cdot5}{2+3}\right)$

すなわち　$\left(\dfrac{16}{5},\ -\dfrac{7}{5},\ 2\right)$

外分：$\left(\dfrac{-3\cdot2+2\cdot5}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot(-3)+2\cdot1}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot0+2\cdot5}{2-3}\right)$

すなわち　$(-4,\ -11,\ -10)$

(2)　$\left(\dfrac{5+8}{2},\ \dfrac{1+(-1)}{2},\ \dfrac{5+1}{2}\right)$　　すなわち　$\left(\dfrac{13}{2},\ 0,\ 3\right)$

(3)　$\left(\dfrac{2+5+8}{3},\ \dfrac{-3+1+(-1)}{3},\ \dfrac{0+5+1}{3}\right)$　　すなわち　$(5,\ -1,\ 2)$

11．次のような球面の方程式を求めよ。

(1)　原点を中心とする半径 2 の球面

(2)　点 (3，−2，1) を中心とする半径 1 の球面

(3)　点 A (1，2，−1) を中心とし，点 B (3，−1，3) を通る球面

(4)　直径の両端が 2 点 A (1，−2，3)，B (−3，−6，−1) である球面

(5)　点 (2，−1，0) で xy 平面に接する半径 3 の球面

解答　(1)　$x^2+y^2+z^2=4$　　(2)　$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$

(3)　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=29$　　(4)　$(x+1)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=12$

(5)　$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$ または $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$

解説

(1)　$x^2+y^2+z^2=2^2$　　すなわち　$x^2+y^2+z^2=4$

(2)　$(x-3)^2+\{y-(-2)\}^2+(z-1)^2=1^2$　　すなわち　$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$

(3)　半径は線分 AB の長さに等しい。

ここで　$AB=\sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2+\{3-(-1)\}^2}=\sqrt{29}$

よって，求める球面の方程式は　$(x-1)^2+(y-2)^2+\{z-(-1)\}^2=(\sqrt{29})^2$

すなわち　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=29$

(4)　線分 AB の中点を C とすると，この球面の中心は点 C で，半径は線分 CA の長さに等しい。点 C の座標は

$\left(\dfrac{1-3}{2},\ \dfrac{-2-6}{2},\ \dfrac{3-1}{2}\right)$　　すなわち　$(-1,\ -4,\ 1)$

よって　$CA=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{-2-(-4)\}^2+(3-1)^2}=2\sqrt{3}$

したがって，求める球面の方程式は　$\{x-(-1)\}^2+\{y-(-4)\}^2+(z-1)^2=(2\sqrt{3})^2$

すなわち　$(x+1)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=12$

(5)　球面の中心の座標は

(2，−1，3) または (2，−1，−3)

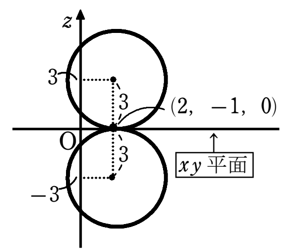
よって，求める球面の方程式は

$(x-2)^2+\{y-(-1)\}^2+(z-3)^2=3^2$ または

$(x-2)^2+\{y-(-1)\}^2+\{z-(-3)\}^2=3^2$

すなわち　$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$ または

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$



12．方程式 $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z+5=0$ ……① について

(1)　① は $\left(x+{}^{ア}\boxed{}\right)^2+\left(y-{}^{イ}\boxed{}\right)^2+\left(z-{}^{ウ}\boxed{}\right)^2={}^{エ}\boxed{}$ と変形できる。

(2)　① はどのような図形を表すか。

解答　(1)　(ア)　1　　(イ)　1　　(ウ)　2　　(エ)　1

(2)　中心 (−1，1，2)，半径 1 の球面

解説

(1)　① を変形すると

$(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)+(z^2-4z+4)=1+1+4-5$

すなわち　$(x+{}^{ア}1)^2+(y-{}^{イ}1)^2+(z-{}^{ウ}2)^2={}^{エ}1$ ……②

(2)　② から，① は 中心 (−1，1，2)，半径 1 の球面 を表す。

13．球面 $(x+2)^2+(y-5)^2+(z-8)^2=10^2$ と，次の座標平面または平面が交わる部分は円を表す。その中心の座標と半径を求めよ。

(1)　xy 平面　　(2)　zx 平面　　(3)　$z=2$　　(4)　$x=-6$

解答　中心，半径の順に　(1)　(−2，5，0)，6　　(2)　(−2，0，8)，$5\sqrt{3}$

(3)　(−2，5，2)，8　　(4)　(−6，5，8)，$2\sqrt{21}$

解説

(1)　球面の方程式で，$z=0$ とすると

$(x+2)^2+(y-5)^2+(0-8)^2=10^2$

よって　$(x+2)^2+(y-5)^2=36$

この方程式は，xy 平面上では円を表す。

その中心の座標は　(−2，5，0)，　半径は　$\sqrt{36}=6$

(2)　球面の方程式で，$y=0$ とすると

$(x+2)^2+(0-5)^2+(z-8)^2=10^2$

よって　$(x+2)^2+(z-8)^2=75$

この方程式は，zx 平面上では円を表す。

その中心の座標は　(−2，0，8)，　半径は　$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

(3)　球面の方程式で，$z=2$ とすると

$(x+2)^2+(y-5)^2+(2-8)^2=10^2$

よって　$(x+2)^2+(y-5)^2=64$

この方程式は，平面 $z=2$ 上では円を表す。

その中心の座標は　(−2，5，2)，　半径は　$\sqrt{64}=8$

(4)　球面の方程式で，$x=-6$ とすると

$(-6+2)^2+(y-5)^2+(z-8)^2=10^2$

よって　$(y-5)^2+(z-8)^2=84$

この方程式は，平面 $x=-6$ 上では円を表す。

その中心の座標は　(−6，5，8)，　半径は　$\sqrt{84}=2\sqrt{21}$