数学演習（空間ベクトル）Ｈ２１．９．１４　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

１．(1)　$\vec{a}=(2,\ -3,\ -1)$，$\vec{b}=(-1,\ -2,\ -3)$ のなす角 θ を求めよ。

(2)　空間に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 2,\ 2)$ をとり，原点を O とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

２．平行六面体 ABCD-EFGH において，辺 AB，AD の中点を，それぞれ P，Q とし，平行四辺形 EFGH の対角線の交点を R とすると，平行六面体の対角線 AG は △PQR の重心 K を通ることを証明せよ。

３．1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。線分 AB を 1 : 2 に内分する点を L，線分 BC の中点を M とする。線分 AM と線分 CL の交点を P とするとき，

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　線分 OP の長さを求めよ。

４．四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺OAの中点をL，辺BCを 2 : 1 に内分する点をMとし，線分LMを 3 : 1 に内分する点をNとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2)　直線ONと平面ABCの交点をPとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(3)　直線BNと平面OCAの交点をQとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

5. 四面体 ABCD において，辺 AB を $1:2$ に内分する点を P，辺 AC の中点を Q，辺 AD を $3:1$ に内分する点を R とし，$\triangle$BCD の重心を G とする。$\triangle$PQR と直線 AG が交わる点を T とするとき，$\overrightarrow{AT}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ。

6. O を原点とする座標空間内に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(-1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ -1,\ 1)$ がある。O から，3 点 A，B，C の定める平面に下ろした垂線の足を H とするとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

7. 2 点 A$(3,\ 1,\ 4)$，B$(1,\ 2,\ -1)$ を通る直線上の点のうちで，原点に最も近い点の座標を求めよ。

8. 次の球面の方程式を求めよ。

(1)　2 点 A$(3,\ 2,\ -4)$，B$(-1,\ 2,\ 0)$ を直径の両端とする球面

(2)　点 $(3,\ -5,\ 2)$ を中心とし，xy 平面に接する球面

数学演習（空間ベクトル）Ｈ２１．９．１４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．(1) $\vec{a}=(2,\ -3,\ -1)$，$\vec{b}=(-1,\ -2,\ -3)$ のなす角 θ を求めよ。

(2) 空間に３点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 2,\ 2)$ をとり，原点を O とする。２つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

解答　(1) $\theta=60°$　　(2) $\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，$\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$

(1) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2\times(-1)+(-3)\times(-2)+(-1)\times(-3)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}}$

$=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

(2) 求める単位ベクトルを $\vec{u}=(x,\ y,\ z)$ とする。

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 2,\ 2)$

$\vec{u}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{u}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$x+2y=0$　……①，$-x+2y+2z=0$　……②

$\vec{u}$ は単位ベクトルであるから　$|\vec{u}|=1$

ゆえに　$x^2+y^2+z^2=1$　……③

①，② から　$y=-\dfrac{x}{2}$，$z=x$

これらを ③ に代入して　$\dfrac{9}{4}x^2=1$

よって　$x=\pm\dfrac{2}{3}$

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき　$y=-\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{2}{3}$

$x=-\dfrac{2}{3}$ のとき　$y=\dfrac{1}{3}$，$z=-\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$\vec{u}=\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，$\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

２．平行六面体 ABCD-EFGH において，辺 AB，AD の中点を，それぞれ P，Q とし，平行四辺形 EFGH の対角線の交点を R とすると，平行六面体の対角線 AG は △PQR の重心 K を通ることを証明せよ。

解答　略

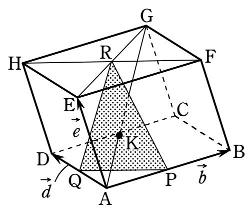
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\vec{b}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\vec{d}}{2}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

点 R は対角線 EG の中点であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{2}$



ゆえに，△PQR の重心 K について

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{d}}{2}+\dfrac{\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{2}\right)$

$=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=3\overrightarrow{\mathrm{AK}}$

したがって，対角線 AG は △PQR の重心 K を通る。

３．１辺の長さが２の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。線分 AB を $1:2$ に内分する点を L，線分 BC の中点を M とする。線分 AM と線分 CL の交点を P とするとき，

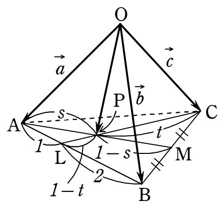
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 線分 OP の長さを求めよ。

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$



AP : PM $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

$=(1-s)\vec{a}+s\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)$

$=(1-s)\vec{a}+\dfrac{1}{2}s\vec{b}+\dfrac{1}{2}s\vec{c}$　……①

CP : PL $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OL}}=(1-t)\vec{c}+t\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)$

$=\dfrac{2}{3}t\vec{a}+\dfrac{1}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$　……②

①，② から　$(1-s)\vec{a}+\dfrac{1}{2}s\vec{b}+\dfrac{1}{2}s\vec{c}=\dfrac{2}{3}t\vec{a}+\dfrac{1}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

４点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$1-s=\dfrac{2}{3}t$，$\dfrac{1}{2}s=\dfrac{1}{3}t$，$\dfrac{1}{2}s=1-t$

これを解いて　$s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{3}{4}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

(2) 正四面体は１辺の長さが２であるから

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot2\cdot\cos60°=2$

よって，

$\mathrm{OP}^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

$=\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right|^2$

$=\dfrac{1}{16}|2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$

$=\dfrac{1}{16}(4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\dfrac{1}{16}(4\cdot2^2+2^2+2^2+4\cdot2+2\cdot2+4\cdot2)=\dfrac{44}{16}=\dfrac{11}{4}$

$\mathrm{OP}>0$　より　$\mathrm{OP}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

４．四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺OAの中点をL，辺BCを $2:1$ に内分する点をMとし，線分LMを $3:1$ に内分する点をNとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

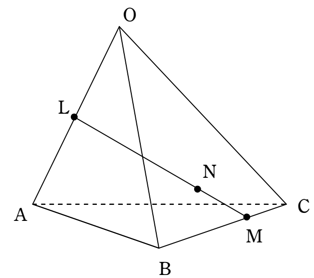
(2) 直線ONと平面ABCの交点をPとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(3) 直線BNと平面OCAの交点をQとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{8}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{4}{7}\vec{c}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$



$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OL}}+3\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{3+1}$

$=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{8}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

(2)　３点 O, N, P は一直線上にあるので

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

$=k\left(\dfrac{1}{8}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{8}k\vec{a}+\dfrac{1}{4}k\vec{b}+\dfrac{1}{2}k\vec{c}$　……①

とおける。ここで，点Pは平面ABC上なので，①より

$\dfrac{1}{8}k+\dfrac{1}{4}k+\dfrac{1}{2}k=1$

が成り立つ。解いて　$k=\dfrac{8}{7}$

よって①に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{4}{7}\vec{c}$

別解　<①まで同じ>

点Pは平面ABC上なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　なる実数 s，t が存在する。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の表され方はただ１通りより，①と係数を比較して

$$\begin{cases}\dfrac{1}{8}k=1-s-t\\[2mm] \dfrac{1}{4}k=s\\[2mm] \dfrac{1}{2}k=t\end{cases}$$

よって　$k=\dfrac{8}{7}$，$s=\dfrac{2}{7}$，$t=\dfrac{4}{7}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{4}{7}\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}$$

$$=\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

3 点 B，N，Q は一直線上より，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=k'\overrightarrow{\mathrm{BN}}$　とおけるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k'\overrightarrow{\mathrm{BN}}$$

$$=\vec{b}+k'\left(\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{8}k'\vec{a}+\left(1-\frac{3}{4}k'\right)\vec{b}+\frac{1}{2}k'\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

となる。ここで，点Qは平面OCA上なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s'\overrightarrow{OC}+t'\overrightarrow{OA}\quad\cdots\cdots③$$

表すことができる。③式では$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$の係数が 0 であることに注意すると②，③から

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の表し方がただ 1 通りであるので，係数を比較して

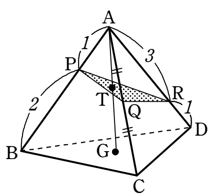
$$\begin{cases}\dfrac{1}{8}k'=t'\\[2mm] 1-\dfrac{3}{4}k'=0\\[2mm] \dfrac{1}{2}k'=s'\end{cases}$$

よって　$k'=\dfrac{4}{3}$，$t'=\dfrac{1}{6}$，$s'=\dfrac{2}{3}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

5．四面体 ABCD において，辺 AB を 1：2 に内分する点を P，辺 AC の中点を Q，辺 AD を 3：1 に内分する点を R とし，△BCD の重心を G とする。△PQR と直線 AG が交わる点を T とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\dfrac{3}{19}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3}$$



T は直線 AG 上にあるから，k を実数とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=k\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

$$=\frac{k}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\quad\cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$　となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\frac{k}{3}\left(3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}\right)$$

$$=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\frac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

点 T は平面 PQR 上にあるから

$$k+\frac{2}{3}k+\frac{4}{9}k=1\qquad ゆえに\qquad k=\frac{9}{19}$$

① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\dfrac{3}{19}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

別解　<①を求めるまでは同じ>

点 T は平面 PQR 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}$　なる実数 s，t が存在する。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PT}}$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+s(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+t(\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

$$=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+s\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

$$=\frac{1}{3}(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}s\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{3}{4}t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}$の表され方はただ 1 通りより，①と係数を比較して

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}k=\dfrac{1}{3}(1-s-t)\\[2mm] \dfrac{1}{3}k=\dfrac{1}{2}s\\[2mm] \dfrac{1}{3}k=\dfrac{3}{4}t\end{cases}$$

よって　$k=\dfrac{9}{19}$，$s=\dfrac{6}{19}$，$t=\dfrac{4}{19}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\dfrac{3}{19}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

6．O を原点とする座標空間内に 3 点 A (1，0，0)，B (−1，1，0)，C (1，−1，1) がある。O から，3 点 A，B，C の定める平面に下ろした垂線の足を H とするとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

解答　$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{9},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$，$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{3}$

3 点 A，B，C が定める平面を α とする。

H は平面 α 上の点であるから，s，t，u を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ s+t+u=1\quad\cdots\cdots①$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s(1,\ 0,\ 0)+t(-1,\ 1,\ 0)+u(1,\ -1,\ 1)$

$$=(s-t+u,\ t-u,\ u)\qquad\cdots\cdots②$$

また，$\mathrm{OH}\perp\alpha$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つ。

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$(s-t+u)\times(-2)+(t-u)\times1+u\times0=0$$

よって　$-2s+3t-3u=0$　$\cdots\cdots③$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ から

$$(s-t+u)\times0+(t-u)\times(-1)+u\times1=0$$

ゆえに　$-t+2u=0$　$\cdots\cdots④$

①，③，④ を解いて　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{4}{9}$，$u=\dfrac{2}{9}$

よって，② から　$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{9},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$

ゆえに　$\mathrm{OH}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{9}\right)^2+\left(\dfrac{2}{9}\right)^2+\left(\dfrac{2}{9}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$

7．2 点 A (3，1，4)，B (1，2，−1) を通る直線上の点のうちで，原点に最も近い点の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{11}{6},\ -\dfrac{1}{6}\right)$

原点を O，直線 AB 上の点を P，t を媒介変数とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{AB}$$

$$=(3,\ 1,\ 4)+t(1-3,\ 2-1,\ -1-4)$$

$$=(3-2t,\ 1+t,\ 4-5t)$$

ゆえに　$\mathrm{OP}^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=(3-2t)^2+(1+t)^2+(4-5t)^2$

$$=30t^2-50t+26=30\left(t-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{31}{6}$$

$t=\dfrac{5}{6}$ のとき OP^2 は最小となり，OP も最小になる。

したがって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{11}{6},\ -\dfrac{1}{6}\right)$

8．次の球面の方程式を求めよ。

(1)　2 点 A (3，2，−4)，B (−1，2，0) を直径の両端とする球面

(2)　点 (3，−5，2) を中心とし，xy 平面に接する球面

解答　(1)　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=8$　(2)　$(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=4$

(1)　線分 AB の中点 M が球面の中心であるから

$$\mathrm{M}\left(\frac{3-1}{2},\ \frac{2+2}{2},\ \frac{-4+0}{2}\right)\quad すなわち\quad \mathrm{M}\,(1,\ 2,\ -2)$$

また半径は　$\mathrm{AM}=\sqrt{(1-3)^2+(2-2)^2+\{-2-(-4)\}^2}=2\sqrt{2}$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2+\{z-(-2)\}^2=(2\sqrt{2})^2$$

したがって　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=8$

(2)　中心の z 座標が 2 であるから，球面の半径は　2

よって，求める球面の方程式は

$$(x-3)^2+\{y-(-5)\}^2+(z-2)^2=2^2$$

したがって　$(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=4$