数学演習（空間ベクトル）Ｈ２１．９．８　　(　)組(　)番　名前(　)

１．$\vec{a}=(10,\ -4,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 2)$ に対し，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。t が実数の値をとって変化するとき，$\vec{p}$ の大きさの最小値とそのときの t の値を求めよ。

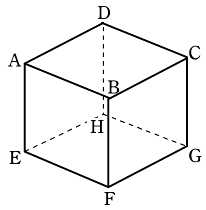
２．2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ -2)$，$\vec{b}=(-2,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 9 のベクトル $\vec{c}$ を求めよ。

３．(1)　次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積となす角 θ を求めよ。

$$\vec{a}=(1,\ 0,\ 1),\quad \vec{b}=(2,\ 2,\ 1)$$

(2)　3 点 A (1，1，0)，B (0，2，2)，C (1，2，1) を頂点とする △ABC において，∠BAC の大きさ θ を求めよ。

(3)　1 辺の長さが 1 の右の立方体において，内積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HG}$，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AG}$ を求めよ。



４．4 点 A $(\vec{a})$，B $(\vec{b})$，C $(\vec{c})$，D $(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。ただし，△ABC の重心を G とする。

(1)　辺 AC を 3 : 2 に内分する点を P，辺 BD を 3 : 2 に外分する点を Q とするとき　$\overrightarrow{PQ}$

(2)　線分 GD を 1 : 3 に内分する点を F$(\vec{f})$ とするとき　$\vec{f}$

５．平行六面体 OADB−CLMN において，△ABC の重心を G とするとき，3 点 O，G，M は一直線上にあることを証明せよ。

６．平行六面体 OADB−CEGF において，辺 DG の G を越える延長上に GM＝2DG となる点 M をとり，直線 OM と平面 ABC の交点をNとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，比 ON : OM を求めよ。

7. 四面体 ABCD において，辺 AB を $1:2$ に内分する点を P，辺 AC の中点を Q，辺 AD を $3:1$ に内分する点を R とし，△BCD の重心を G とする。△PQR と直線 AG が交わる点を T とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ。

8. 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ が定める平面 α に原点 O から垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

9. 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 点 $(3,\ -2,\ 1)$ を中心とする半径 2 の球面

(2) 原点を中心とし，点 $(2,\ 1,\ -3)$ を通る球面

(3) 2 点 A$(5,\ 3,\ -2)$，B$(-1,\ 3,\ 2)$ を直径の両端とする球面

10. 球面 $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3^2$ と yz 平面が交わる部分は円である。その中心の座標と半径を求めよ。

１． $\vec{a}=(10,\ -4,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 2)$ に対し，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。t が実数の値をとって変化するとき，$\vec{p}$ の大きさの最小値とそのときの t の値を求めよ。

解答　$t=2$ のとき最小値 $\sqrt{89}$

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}=(10,\ -4,\ 3)+t(-2,\ 1,\ 2)$

$=(-2t+10,\ t-4,\ 2t+3)$

よって　$|\vec{p}|^2=(-2t+10)^2+(t-4)^2+(2t+3)^2$

$=9t^2-36t+125=9(t^2-4t+2^2)-9\times2^2+125$

$=9(t-2)^2+89$

ゆえに，$t=2$ のとき $|\vec{p}|^2$ は最小となり，$|\vec{p}|\geqq0$ であるから，

このとき $|\vec{p}|$ も最小となる。

したがって　$t=2$ のとき最小値 $\sqrt{89}$

２． ２つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ -2)$，$\vec{b}=(-2,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが９のベクトル $\vec{c}$ を求めよ。

解答　$\vec{c}=(6,\ -3,\ 6)$，$(-6,\ 3,\ -6)$

$\vec{c}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{c}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

よって　$x-2y-2z=0$　……①

$\vec{b}\perp\vec{c}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

よって　$-2x-2y+z=0$　……②

また，$|\vec{c}|=9$ であるから　$|\vec{c}|^2=9^2$

よって　$x^2+y^2+z^2=81$　……③

①－② から　$3x-3z=0$　　よって　$x=z$　……④

④ を ① に代入して整理すると　$y=-\dfrac{1}{2}z$　……⑤

④，⑤ を ③ に代入して整理すると　$z^2=36$

ゆえに　$z=\pm6$

このとき，④，⑤ から　$z=6$ のとき　$x=6,\ y=-3$

$z=-6$ のとき　$x=-6,\ y=3$

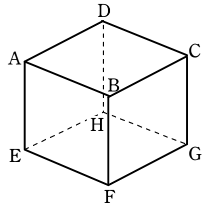
したがって　$\vec{c}=(6,\ -3,\ 6)$，$(-6,\ 3,\ -6)$

３． (1)　次の２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積となす角 θ を求めよ。

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 1)$，　$\vec{b}=(2,\ 2,\ 1)$

(2)　３点 A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 2)$，C$(1,\ 2,\ 1)$ を頂点とする △ABC において，∠BAC の大きさ θ を求めよ。

(3)　１辺の長さが１の右の立方体において，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を求めよ。



解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$\theta=45°$　(2)　$\theta=30°$　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HG}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=2$

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+0\times2+1\times1=3$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=45°$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0-1,\ 2-1,\ 2-0)=(-1,\ 1,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-1,\ 2-1,\ 1-0)=(0,\ 1,\ 1)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-1\times0+1\times1+2\times1=3$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=30°$

(3)　$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\angle\mathrm{CAB}=45°$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos45°=\sqrt{2}\times1\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$

また　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}})=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2$

$=1^2+0+0+0+0+1^2=2$

４． ４点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。ただし，△ABC の重心を G とする。

(1)　辺 AC を 3 : 2 に内分する点を P，辺 BD を 3 : 2 に外分する点を Q とするとき $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

(2)　線分 GD を 1 : 3 に内分する点を F$(\vec{f})$ とするとき　$\vec{f}$

解答　(1)　$-\dfrac{2}{5}\vec{a}-2\vec{b}-\dfrac{3}{5}\vec{c}+3\vec{d}$　　(2)　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

(1)　P$(\vec{p})$，Q$(\vec{q})$ とすると

$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{c}}{3+2}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$，　$\vec{q}=\dfrac{-2\vec{b}+3\vec{d}}{3-2}=-2\vec{b}+3\vec{d}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{q}-\vec{p}=(-2\vec{b}+3\vec{d})-\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{c}\right)$

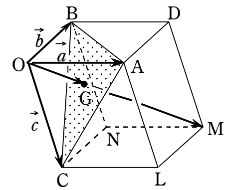
$=-\dfrac{2}{5}\vec{a}-2\vec{b}-\dfrac{3}{5}\vec{c}+3\vec{d}$

(2)　G$(\vec{g})$ とすると，$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ であるから　$3\vec{g}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

よって　$\vec{f}=\dfrac{3\vec{g}+1\cdot\vec{d}}{1+3}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

５． 平行六面体 OADB－CLMN において，△ABC の重心を G とするとき，３点 O，G，M は一直線上にあることを証明せよ。

解答　略



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

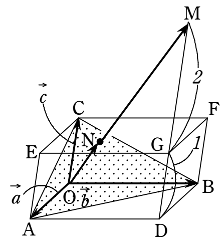
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

したがって，３点 O，G，M は一直線上にある。

６． 平行六面体 OADB－CEGF において，辺 DG の G を越える延長上に GM＝2DG となる点 M をとり，直線 OM と平面 ABC の交点を N とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，比 ON : OM を求めよ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$，ON : OM＝1 : 5



点 N は直線 OM 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となる実数 k がある。

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+3k\vec{c}$

点 N は平面 ABC 上にあるから　$k+k+3k=1$

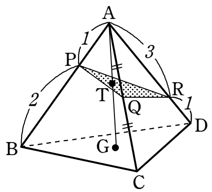
ゆえに　$k=\dfrac{1}{5}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

また　ON : OM＝1 : 5

7. 四面体ABCDにおいて，辺ABを1 : 2に内分する点をP，辺ACの中点をQ，辺ADを3 : 1に内分する点をRとし，△BCDの重心をGとする。△PQRと直線AGが交わる点をTとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\dfrac{3}{19}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$



$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3}$

Tは直線AG上にあるから，kを実数とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=k\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$
$$=\frac{k}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\quad\cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\frac{k}{3}\left(3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}\right)$$
$$=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\frac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

点Tは平面PQR上にあるから

$$k+\frac{2}{3}k+\frac{4}{9}k=1\qquad ゆえに\qquad k=\frac{9}{19}$$

①に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\dfrac{3}{19}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

8. 3点A(1, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(0, 0, 2)が定める平面αに原点Oから垂線OHを下ろす。このとき，点Hの座標と線分OHの長さを求めよ。

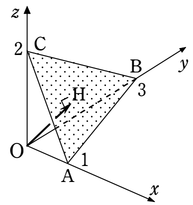
解答　$\mathrm{H}\left(\dfrac{36}{49},\ \dfrac{12}{49},\ \dfrac{18}{49}\right)$，$\mathrm{OH}=\dfrac{6}{7}$

点Hは平面α上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad s+t+u=1\quad\cdots\cdots①$$

となる実数s，t，uがある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 3,\ 0)+u(0,\ 0,\ 2)$
$=(s,\ 3t,\ 2u)$



また，OH⊥(平面α)であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 2)$であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$より　$-s+9t=0$　……②

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$より　$-s+4u=0$　……③

①～③を解いて　$s=\dfrac{36}{49}$，$t=\dfrac{4}{49}$，$u=\dfrac{9}{49}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{36}{49},\ \dfrac{12}{49},\ \dfrac{18}{49}\right)$から　$\mathrm{H}\left(\dfrac{36}{49},\ \dfrac{12}{49},\ \dfrac{18}{49}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{6}{49}(6,\ 2,\ 3)$であるから，線分OHの長さは

$$\mathrm{OH}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{6}{49}\sqrt{6^2+2^2+3^2}=\frac{6}{49}\times7=\frac{6}{7}$$

9. 次のような球面の方程式を求めよ。

(1)　点(3, −2, 1)を中心とする半径2の球面

(2)　原点を中心とし，点(2, 1, −3)を通る球面

(3)　2点A(5, 3, −2)，B(−1, 3, 2)を直径の両端とする球面

解答　(1)　$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$　　(2)　$x^2+y^2+z^2=14$

(3)　$(x-2)^2+(y-3)^2+z^2=13$

(1)　$(x-3)^2+\{y-(-2)\}^2+(z-1)^2=2^2$

すなわち　$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$

(2)　半径は　$\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$

よって，球面の方程式は　$x^2+y^2+z^2=14$

(3)　球面の中心は，線分ABの中点Mである。点Mの座標は

$$\left(\frac{5-1}{2},\ \frac{3+3}{2},\ \frac{-2+2}{2}\right)\qquad すなわち\qquad (2,\ 3,\ 0)$$

また，半径は　$\mathrm{AM}=\sqrt{(2-5)^2+(3-3)^2+\{0-(-2)\}^2}=\sqrt{13}$

よって，球面の方程式は　$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-0)^2=(\sqrt{13})^2$

すなわち　$(x-2)^2+(y-3)^2+z^2=13$

10. 球面$(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3^2$と$yz$平面が交わる部分は円である。その中心の座標と半径を求めよ。

解答　中心(0, 4, 2)，半径$2\sqrt{2}$

球面の方程式で，$x=0$とすると　$(0+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3^2$

整理すると　$(y-4)^2+(z-2)^2=8$

この方程式は，yz平面上では円を表す。

その　中心の座標は(0, 4, 2)，

半径は$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$　である。