

1 $\vec{a} = (-1, 2, -3), \vec{b} = (3, -1, -2)$ のとき、ベクトル $3\vec{a} - 2\vec{b}$ を成分で表せ。また、その大きさを求めよ。

3 2つのベクトル $\vec{a} = (2, 1, 3), \vec{b} = (1, -1, 0)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{c}$ を求めよ。

5 3点 $A(1, 3, -1), B(-2, 1, 3), C(-1, 1, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の座標と面積 S を求めよ。

2 2つのベクトル $\vec{a} = (0, 0, -2), \vec{b} = (1, \sqrt{2}, 3)$ のなす角 θ を求めよ。

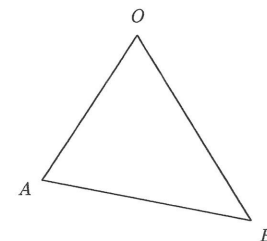
4 3点 $A(1, 0, 2), B(2, -1, 0), C(x, y, 6)$ が一直線上にあるとき、 x, y の値を求めよ。

6 $A(-1, 2, 3), B(2, -1, 6)$ のとき、線分 AB を $1:2$ に内分する点 P と外分する点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

7 3点 $A(2, 0, -3), B(-2, 6, 1)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

8 四面体 $OABC$ において、辺 BC の中点を M 、辺 OA を $3:2$ に内分する点を N とする。線分 MN を $1:2$ に内分する点を P とし、直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

9 面積が S の $\triangle OAB$ に対し、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s, t が条件 $\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$ を満たしながら動くとき、点 P が動く範囲を図示し、その面積を S で表せ。



- ① $\vec{a} = (-1, 2, -3)$, $\vec{b} = (3, -1, -2)$ のとき、ベクトル $3\vec{a} - 2\vec{b}$ を成分で表せ。また、その大きさを求めよ。

(成分)

$$\begin{aligned} 3\vec{a} - 2\vec{b} &= 3(-1, 2, -3) - 2(3, -1, -2) \\ &= (-3, 6, -9) - (6, -2, -4) \\ &= (-3-6, 6+2, -9+4) = (-9, 8, -5) \end{aligned}$$

(大きさ)

$$\begin{aligned} |3\vec{a} - 2\vec{b}| &= \sqrt{(-9)^2 + 8^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{81 + 64 + 25} = \sqrt{170} \end{aligned}$$

② $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{14}$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \times 3 + 2 \times (-1) + (-3) \times (-2) = 1$
 $|3\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$
 $= 9 \times 14 - 12 \times 1 + 4 \times 14 = 170$

- ② 2つのベクトル $\vec{a} = (0, 0, -2)$, $\vec{b} = (1, \sqrt{2}, 3)$ のなす角 θ を求めよ。

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \times 1 + 0 \times \sqrt{2} + (-2) \times 3 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-6}{2 \times 2\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = 150^\circ$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \quad \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = 150^\circ$$

$$\theta = 150^\circ$$

- ③ 2つのベクトル $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \vec{e} &= (x, y, z) \text{ とおく} \\ \vec{e} &\text{は単位ベクトルより } |\vec{e}| = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{e} &= 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{e} = 0 \\ (2, 1, 3) \cdot (x, y, z) &= 0 \\ (1, -1, 0) \cdot (x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \quad \text{①} \\ x - y &= 0 \quad \text{②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x \text{ とおく} \\ 2x + x + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 3z &= 0 \\ x + z &= 0 \quad \text{③} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= -x \\ \vec{e} &= (x, x, -x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{e}| &= 1 \\ x^2 + x^2 + (-x)^2 &= 1 \\ 3x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \\ x &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ 又は } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{AC} = k\vec{AB} \text{ と仮定する} \quad \vec{AC} = (x-1, y-0, z-2) = (x-1, y, z-2)$$

$$\vec{AB} = (2-1, -1-0, 0-2) = (1, -1, -2)$$

$$(x-1, y, z-2) = k(1, -1, -2)$$

$$\begin{aligned} x-1 &= k, \quad y = -k, \quad z-2 = -2k \\ x &= 1+k, \quad y = -k, \quad z = 2-2k \end{aligned}$$

$$k = -2, \quad x = -1, \quad y = 2, \quad z = 6$$

- ⑤ 3点 $A(1, 3, -1)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(-1, 1, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の座標と面積 S を求めよ。

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$G \left(\frac{1+(-2)+(-1)}{3}, \frac{3+1+1}{3}, \frac{(-1)+3+2}{3} \right)$$

$$G \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\vec{AB} = (-2-1, 1-3, 3+1) = (-3, -2, 4)$$

$$\vec{AC} = (-1-1, 1-3, 2+1) = (-2, -2, 3)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3) \times (-2) + (-2) \times (-2) + 4 \times 3 = 22$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{29 \times 17 - 22^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{493 - 484}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{9} = \frac{3}{2}$$

- 6 $A(-1, 2, 3), B(2, -1, 6)$ のとき、線分 AB を $1:2$ に内分する点 P と外分する点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

$$P\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{1+2}, \frac{2 \times 2 + 1 \times (-1)}{1+2}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 6}{1+2}\right)$$

$$P\left(\frac{0}{3}, \frac{3}{3}, \frac{12}{3}\right) = P(0, 1, 4)$$

$$Q\left(\frac{2 \times (-1) + (-1) \times 2}{-1+2}, \frac{2 \times 2 + (-1) \times (-1)}{-1+2}, \frac{2 \times 3 + (-1) \times 6}{-1+2}\right)$$

$$Q(-4, 5, 0)$$

- 7 3点 $A(2, 0, -3), B(-2, 6, 1)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

中心は線分 AB の中点より

中心の座標は

$$\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$$

$$(0, 3, -1)$$

また、半径は中心と点 A との距離より

$$\sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{17}$$

以上より

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$$

- 8 四面体 $OABC$ において、辺 BC の中点を M 、辺 OA を $3:2$ に内分する点を N とする。線分 MN を $1:2$ に内分する点を P とし、直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とするとき、 $\vec{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

$$\vec{ON} = \frac{3}{5} \vec{a}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$$

よって $\triangle ONM$ において

点 P は MN を $1:2$ に内分するから、

より

$$\vec{OP} = \frac{2 \times \vec{OM} + 1 \times \vec{ON}}{1+2}$$

$$= \frac{2}{3} \vec{OM} + \frac{1}{3} \vec{ON}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \vec{a}$$

$$= \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} + \frac{1}{5} \vec{a}$$

また、3点 O, P, Q は一直線上にあるので

$$\vec{OQ} = k \vec{OP} \quad (\text{ある } k > 0 \text{ より})$$

$$\vec{OQ} = \frac{1}{5} k \vec{a} + \frac{1}{3} k \vec{b} + \frac{1}{3} k \vec{c} \quad \dots (*)$$

また、点 Q は平面 ABC 上にあるので、(*) において

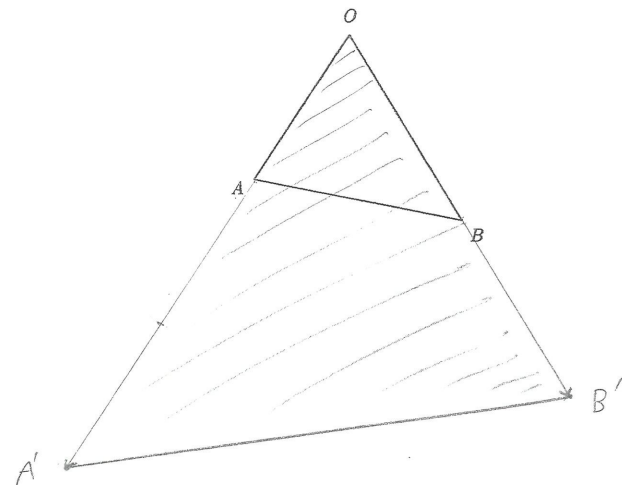
$$\frac{1}{5} k + \frac{1}{3} k + \frac{1}{3} k = 1$$

$$\text{解いて } \frac{13}{15} k = 1 \quad \therefore k = \frac{15}{13}$$

(*) に代入して

$$\vec{OQ} = \frac{3}{13} \vec{a} + \frac{5}{13} \vec{b} + \frac{5}{13} \vec{c}$$

- 9 面積が S の $\triangle OAB$ に対し、 $\vec{OP} = s \vec{OA} + t \vec{OB}$ とする。実数 s, t が条件 $\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$ を満たしながら動くとき、点 P が動く範囲を明示し、その面積を S で表せ。



$$\vec{OP} = s \vec{OA} + t \vec{OB}$$

$$= \frac{1}{3}s \times 3\vec{OA} + \frac{1}{2}t \times 2\vec{OB}$$

$$\text{よって } \vec{OA'} = 3\vec{OA}, \vec{OB'} = 2\vec{OB}, s' = \frac{1}{3}s, t' = \frac{1}{2}t \text{ とおくと}$$

$$\vec{OP} = s' \vec{OA'} + t' \vec{OB'}, s' + t' \leq 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

が成り立つから、点 P の存在範囲は

$\triangle OA'B'$ の内部 (境界を含む) である。

また、 $OA' = 3OA, OB' = 2OB$ より

$$\triangle OA'B' = \frac{1}{2} \times OA' \times OB' \times \sin \angle AOB$$

$$= \frac{1}{2} \times 3OA \times 2OB \times \sin \angle AOB$$

$$= 6 \times \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \angle AOB$$

$$= 6S$$

148