第１回定期考査（空間ベクトル）Ｈ２１．５．２１　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．３点 $A(1,-5,1)$，$B(0,2,-3)$，$C(2,-3,-2)$ について，次のものを求めよ。

(1) 線分 AB を $3:2$ に内分する点の座標

(2) 線分 BC を $2:3$ に外分する点の座標

(3) 線分 CA の長さを求めよ。

２．２つのベクトル $\vec{a}=(1,2,2)$，$\vec{b}=(-1,1,4)$ のなす角 θ を求めよ。

３．２つのベクトル $\vec{a}=(1,-1,0)$，$\vec{b}=(-3,1,-4)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

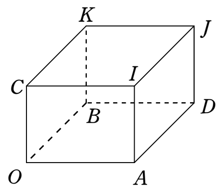
４．１辺の長さが２である正四面体 $OABC$ について，辺 OA を $3:1$ に内分する点を P，辺 OB の中点を Q とし，△ PQC の重心を G とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 線分 OG の長さを求めよ。

５．平行六面体 $OADB-CIJK$ において，辺 DJ の中点を M とし，直線 OM と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $OP:OM$ を簡単な整数比で表せ。

６．１つの直径の両端の２点の座標が $(-2,2,3)$, $(2,6,-1)$ である球面の方程式を求めよ。

７．球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$ について，以下の問いに答えよ。

(1) この球面の中心の座標と半径を求めよ。

(2) この球面と xy 平面との交わりは円となる。その円の中心の座標と半径を求めよ。

８．３点 $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,3)$ を通る平面を α とする。原点から平面 α に垂線を下ろし，その垂線と平面 α との交点を H とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標を求めよ。

(2) 線分 OH の長さを求めよ。

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

第１回定期考査（空間ベクトル）Ｈ２１．５．２１　　　（　　）組（　　）番　名前（ こたえ 　）

1．3点 $A(1,-5,1)$, $B(0,2,-3)$, $C(2,-3,\overset{-2}{2})$ について，次のものを求めよ。

(1) 線分 AB を 3：2 に内分する点の座標

$$\left(\frac{2\cdot1+3\cdot0}{3+2},\ \frac{2(-5)+3\cdot2}{3+2},\ \frac{2\cdot1+3\cdot(-3)}{3+2}\right) \text{ より}$$

$$\left(\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$$

5

(2) 線分 BC を 2：3 に外分する点の座標

$$\left(\frac{-3\cdot0+2\cdot2}{2-3},\ \frac{-3\cdot2+2\cdot(-3)}{2-3},\ \frac{-3\cdot(-3)+2\cdot(-2)}{2-3}\right) \text{ より}$$

$$(-4,\ 12,\ -5)$$

5

(3) 線分 CA の長さを求めよ。

$$CA=\sqrt{(2-1)^2+(-3+5)^2+(-2-1)^2}$$

$$=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$

5

2．2つのベクトル $\vec{a}=(1,2,2)$, $\vec{b}=(-1,1,4)$ のなす角 θ を求めよ。

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-1)+2\cdot1+2\cdot4$$

$$=-1+2+8=9$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{9}{3\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=45^\circ$

8

3．2つのベクトル $\vec{a}=(1,-1,0)$, $\vec{b}=(-3,1,-4)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

$\vec{e}=(x,y,z)$ とする。

$|\vec{e}|=1$ より　$|\vec{e}|^2=x^2+y^2+z^2=1$ …①

また

$\vec{e}\perp\vec{a}$ より　$\vec{e}\cdot\vec{a}=1\cdot x+(-1)\cdot y+0\cdot z=0$ …②

$\vec{e}\perp\vec{b}$ より　$\vec{e}\cdot\vec{b}=(-3)\cdot x+1\cdot y+(-4)\cdot z=0$ …③

②より　$x=y$

③に代入して

$$-3x+x-4z=0$$

$$\therefore\ z=-\frac{1}{2}x$$

これらを①に代入して

$$x^2+x^2+\left(-\frac{1}{2}x\right)^2=1$$

$$\frac{9}{4}x^2=1$$

$$\therefore\ x^2=\frac{4}{9} \text{ より } x=\pm\frac{2}{3}$$

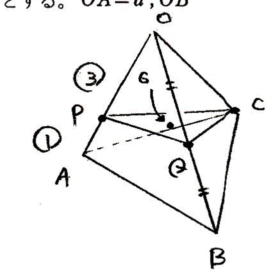
この時　$y=x=\pm\frac{2}{3}$,　$z=-\frac{1}{2}x=\mp\frac{1}{3}$

以上より

$$\vec{e}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

10

4．1辺の長さが2である正四面体 $OABC$ について，辺 OA を 3：1 に内分する点を P，辺 OB の中点を Q とし，△PQC の重心を G とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

5

(2) 線分 OG の長さを求めよ。

四面体 OABC は 1辺の長さが 2 の正四面体なので

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=2$$

(1)より　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$$=\frac{1}{12}(3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}) \text{ より}$$

$$OG^2=|\overrightarrow{OG}|^2$$

$$=\left(\frac{1}{12}\right)^2|3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}|^2$$

$$=\left(\frac{1}{12}\right)^2\{9|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+16|\vec{c}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+16\vec{b}\cdot\vec{c}+24\vec{c}\cdot\vec{a}\}$$

$$=\left(\frac{1}{12}\right)^2(9\cdot2^2+4\cdot2^2+16\cdot2^2+12\cdot2+16\cdot2+24\cdot2)$$

$$=\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot2^2(9+4+16+6+8+12)$$

$$=\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot2^2\cdot55$$　$OG>0$ より　$OG=\frac{2}{12}\sqrt{55}$

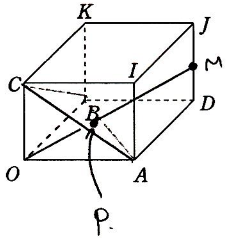
$$=\frac{1}{6}\sqrt{55}$$

8

46

5. 平行六面体 $OADB-CIJK$ において，辺 DJ の中点を M とし，直線 OM と平面 ABC の交点を P とする。$\vec{OA}=\vec{a},\ \vec{OB}=\vec{b},\ \vec{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cancel{\vec{OP}}\ \vec{OM}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。



$\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AD}+\vec{DM}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

5

(2) $\vec{op}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ

O.P.Mは同一直線上より $\vec{op}=k\vec{OM}$ とおける

∴ $\vec{op}=k(\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c})$

$=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}$

ここでPは平面 ABC上なので

$k+k+\frac{1}{2}k=1$ ∴ $k=\frac{2}{5}$

よって $\vec{op}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$

8

$\cancel{(2)}$ (3) $OP:OM$ を簡単な整数比で表せ。

(2)より $\vec{op}=\frac{2}{5}\vec{OM}$ より

$op:OM=2:5$

5

6. 1つの直径の両端の2点の座標が $(-2,2,3),(2,6,-1)$ である球面の方程式を求めよ。

この球面の中心は

2点 (-2.2.3).(2.6.-1) の中点である。

∴ $\left(\frac{-2+2}{2},\ \frac{2+6}{2},\ \frac{3-1}{2}\right)$

よって (0. 4. 1)

ゆえに

$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=r^2$

とおけ. またこの球は点 (-2.2.3)を通るので

$(-2)^2+(2-4)^2+(3-1)^2=r^2$

∴ $r^2=12$

ゆえに

$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=12$

8

7. 球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$ について，以下の問いに答えよ。

(1) この球面の中心の座標と半径を求めよ。

$x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$

$(x^2-2x)+y^2+(z^2+4z)-4=0$

$(x-1)^2-1+y^2+(z+2)^2-4-4=0$

$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$

中心 (1.0.-2). 半径 3

5

(2) この球面と xy 平面との交わりは円となる。その円の中心の座標と半径を求めよ。

xy平面上の点は z=0 より

球面の方程式と連立して

$x^2+y^2-2x-4=0$

$(x-1)^2+y^2=5$

よって交わりの円は 中心 (1.0.0) 半径 $\sqrt{5}$

5

8. 3点 $A(2,0,0), B(0,4,0), C(0,0,3)$ を通る平面を α とする。原点から平面 α に垂線を下ろし，その垂線と平面 α との交点を H とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標を求めよ。

$\vec{OH}=r\vec{OA}+s\vec{OB}+t\vec{OC}$

とすると $r+s+t=1$ …①

また

$\vec{OH}=r(2.0.0)+s(0.4.0)+t(0.0.3)$

$=(2r,4s,3t)$

であり. OH ⊥ 平面ABC より

$\vec{OH}\cdot\vec{AB}=0,\ \vec{OH}\cdot\vec{AC}=0$

が成り立つ。

$\vec{OH}\cdot\vec{AB}=(2r,4s,3t)\cdot(-2,4,0)$

$=-4r+16s+3t\cdot0=0$

∴ $s=\frac{1}{4}r$ …②

$\vec{OH}\cdot\vec{AC}$

$=(2r,4s,3t)\cdot(-2,0,3)$

$=-4r+9t=0$

$t=\frac{4}{9}r$ …③

②③を①に代入して

$r+\frac{1}{4}r+\frac{4}{9}r=1$

∴ $r=\frac{36}{61}$

②③より

$s=\frac{9}{61}$, $t=\frac{16}{61}$

∴ $H\left(\frac{72}{61},\ \frac{36}{61},\ \frac{48}{61}\right)$

8

(2) 線分 OH の長さを求めよ。

$OH=\sqrt{\left(\frac{72}{61}\right)^2+\left(\frac{36}{61}\right)^2+\left(\frac{48}{61}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{12}{61}\right)^2(6^2+3^2+4^2)}$

$=\sqrt{\left(\frac{12}{61}\right)^2(36+9+16)}=\frac{12}{61}\sqrt{61}$

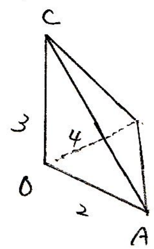
5

(3) △ ABC の面積を求めよ。

四面体 OABC の体積を V とすると

$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH$ …①

$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot OC$ …②



①②より

$\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot\frac{12}{61}\sqrt{61}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}2\cdot4\right)\cdot3$

∴ $\triangle ABC=\sqrt{61}$

5

1/5