

1. 3点$A(-1, 4, 2), B(2, 3, -2), C(4, -1, 0)$について、以下の問いに答えよ。 (1) 線分$AB$の長さを求めよ。 (2) 線分$BC$を3 : 2に内分する点の座標を答えよ。 (3) $\triangle ABC$の重心の座標を求めよ。 2. $\vec{a}=(0, -4, 2), \vec{b}=(2, 1, -1)$とする。$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ (tは実数) について、$\vec{p}$の最小値とそのときのtの値を求めよ。	3. 2つのベクトル$\vec{a}=(1, -1, 1), \vec{b}=(1, \sqrt{6}, -1)$について、$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角を求めよ。 4. 四面体$OABC$の辺$OA$の中点を$M$、辺$BC$を3 : 2に内分する点を$Q$、線分$MQ$の中点を$R$とし、直線$OR$と平面$ABC$の交点を$P$とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき、以下の問いに答えよ。 (1) $\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$を用いて表せ。 (2) 比$OR : RP$を求めよ。	5. 1辺の長さが1である正四面体$OABC$について、頂点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき、以下の問いに答えよ。 (1) $\overrightarrow{OH}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$を用いて表せ。 (2) 線分$OH$の長さを求めよ。 (3) 正四面体$OABC$の体積を求めよ。
--	---	--

1. 3点A(-1, 4, 2), B(2, 3, -2), C(4, -1, 0)について、以下の問に答えよ。

(1) 線分ABの長さを求めよ。

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (3-4)^2 + (-2-2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26} \quad \text{⑤}$$

(2) 線分BCを3:2に内分する点の座標を答えよ。

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{3+2}, \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1)}{3+2}, \frac{2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0}{3+2} \right)$$

$$\text{よって } \left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) \quad \text{⑤}$$

(3) △ABCの重心の座標を求めよ。

$$\left(\frac{-1+2+4}{3}, \frac{4+3-1}{3}, \frac{2-2+0}{3} \right)$$

$$\text{よって } \left(\frac{5}{3}, 2, 0 \right) \quad \text{⑤}$$

2. $\vec{a} = (0, -4, 2), \vec{b} = (2, 1, -1)$ とする。 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ (t は実数) について、 $|\vec{p}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

$$\vec{p} = (0, -4, 2) + t(2, 1, -1) = (2t, t-4, -t+2)$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{(2t)^2 + (t-4)^2 + (-t+2)^2}$$

$$= \sqrt{4t^2 + t^2 - 8t + 16 + t^2 - 4t + 4}$$

$$= \sqrt{6t^2 - 12t + 20}$$

$$= \sqrt{6(t^2 - 2t) + 20}$$

$$= \sqrt{6(t-1)^2 + 14}$$

$$\text{よって } |\vec{p}| \text{ は } t=1 \text{ のとき } \sqrt{14} \text{ と最小} \quad \text{⑤}$$

3. 2つのベクトル $\vec{a} = (1, -1, 1), \vec{b} = (1, \sqrt{6}, -1)$ について、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{6})^2 + (-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot \sqrt{6} + 1 \cdot (-1) = -\sqrt{6}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 120^\circ \quad \text{⑤}$$

4. 四面体OABCの辺OAの中点をM、辺BCを3:2に内分する点をQ、線分MQの中点をRとし、直線ORと平面ABCの交点をPとする。 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $\vec{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 比OR:RPを求めよ。

$$(1) \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{OQ} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{c}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

$$\vec{OR} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OQ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{c}$$

点Pは平面ABCとORの交点、よって

$$\vec{OP} = k\vec{OR} = \frac{k}{4}\vec{a} + \frac{k}{5}\vec{b} + \frac{3k}{10}\vec{c} \quad \dots (i)$$

$$\text{また } \vec{AP} = s\vec{AB} + t\vec{AC} \quad \text{より}$$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{a} + (s\vec{AB} + t\vec{AC})$$

$$= \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$$

$$= (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad \dots (ii)$$

(i)(ii)より

$$\begin{cases} 1-s-t = \frac{k}{4} \\ s = \frac{k}{5} \\ t = \frac{3k}{10} \end{cases} \quad \text{よって } k = \frac{4}{3} \text{ より } \vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{15}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} \quad \text{⑤}$$

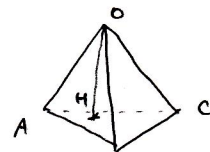
$$\text{また } \vec{OR} = \frac{4}{3}\vec{OP} \text{ より } OR:RP = 3:1 \quad \text{⑤}$$

5. 1辺の長さが1である正四面体OABCについて、頂点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする。 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $\vec{OH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 線分OHの長さを求めよ。

(3) 正四面体OABCの体積を求めよ。



(1) HはABC上より

$$\vec{OH} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad (r+s+t=1 \dots (i))$$

よって、また、OH ⊥ 平面ABC より

$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{よって } \vec{OH} \cdot \vec{BC} = 0 \quad \text{が成り立つ。}$$

$$\therefore |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

よって

$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = (r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$= r\vec{a} \cdot \vec{b} - r|\vec{a}|^2 + s|\vec{b}|^2 - s\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{b} \cdot \vec{c} - t\vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$= \frac{1}{2}r - r + s - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t$$

$$= -\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s = 0 \quad \therefore r = s \quad \dots (ii)$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{BC} = 0 \quad \text{よって } r = t \quad \dots (iii)$$

よって (ii)(iii) より $r = s = t$ であり、(i) より

$$r = s = t = \frac{1}{3} \quad \text{が成り立つ。}$$

$$\therefore \vec{OH} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \quad \text{⑤}$$

$$(2) OH^2 = |\vec{OH}|^2 = \left| \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \right|^2$$

$$= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$= \frac{1}{9}(1 + 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore OH > 0 \text{ より } OH = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(3) \triangle ABC \text{ は正三角形より } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{よって } \text{体積} = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad \text{⑤}$$