

1 2点A(0, 3, 7), B(3, -3, 1)について, 次の座標を求めよ。

- (1) 線分ABを2:1に内分する点 (2) 線分ABを3:2に外分する点

2 点P(2, -3, 1)について以下の点の座標を求めよ。

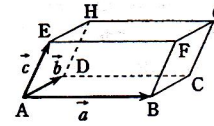
- (1) xy 平面について点Pと対称な点A

- (2) z 軸について点Pと対称な点B

3 2点A(1, 2, 1), B(1, 4, -3)から等距離にある z 軸上の点Pの座標を求めよ。

4 向かい合う3組の面がそれぞれ平行である平行六面体ABCD-EFGHにおいて, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおき, 対角線AGの中点をMとする。このとき, 次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

- (1) $\overrightarrow{CE}$ (2) $\overrightarrow{HB}$ (3) $\overrightarrow{AM}$



5 3点A(1, 1, 0), B(0, 2, 2), C(1, 2, 1)を頂点とする $\triangle ABC$ において, $\angle BAC$ の大きさ θ を求めよ。

6 4点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$), D($\vec{d}$)を頂点とする四面体ABCDにおいて, 次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。ただし, $\triangle ABC$ の重心をGとする。

- (1) 辺ACを3:2に内分する点をP, 辺BDを3:2に外分する点をQとするとき $\overrightarrow{PQ}$

- (2) 線分GDを1:3に内分する点をF($\vec{f}$)とするとき $\vec{f}$

7 平行六面体OADB-CIJKにおいて, $\triangle ABC$ の重心をG, 辺OCの中点をMとすると, 3点D, G, Mは一直線上にあることを証明せよ。

8 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 原点を中心とし、点 $(2, 1, -3)$ を通る球面

(2) 2点 $A(5, 3, -2)$, $B(-1, 3, 2)$ を直径の両端とする球面

9 球面 $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 3^2$ と yz 平面が交わる部分は円である。その中心の座標と半径を求めよ。

10 平行六面体 $OADB-CEGF$ において、辺 DG の G を越える延長上に $GM=GD$ となる点 M をとり、直線 OM と平面 ABC の交点を N とする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

11 1辺の長さが2の正四面体 $ABCD$ において、2辺 AB , CD の中点をそれぞれ M , N とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき、 $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $AB \perp MN$ が成り立つことを証明せよ。

12 3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 2)$ が定める平面 α に原点 O から垂線 OH を下ろす。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

各5点

()組()番 名前()

[1] 2点A(0, 3, 7), B(3, -3, 1)について、次の座標を求めよ。

(1) 線分ABを2:1に内分する点

$$\textcircled{1} \frac{1 \times 0 + 2 \times 3}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

(2) 線分ABを3:2に外分する点

$$\textcircled{2} \frac{-2 \times 0 + 3 \times 3}{3-2} = 9$$

$$\textcircled{3} \frac{1 \times 3 + 2 \times (-3)}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\textcircled{4} \frac{-2 \times 3 + 3 \times (-3)}{3-2} = -15$$

$$\textcircled{5} \frac{1 \times 7 + 2 \times 1}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\textcircled{6} \frac{-2 \times 7 + 3 \times 1}{3-2} = -11$$

よって

$$(2, -1, 3)$$

よって

$$(9, -15, -11)$$

[2] 点P(2, -3, 1)について以下の点の座標を求めよ。

(1) xy平面について点Pと対称な点A

$$A(2, -3, -1)$$

(2) z軸について点Pと対称な点B

$$B(-2, 3, 1)$$

[3] 2点A(1, 2, 1), B(1, 4, -3)から等距離にあるz軸上の点Pの座標を求めよ。

$$P(0, 0, z) \text{ とすると}$$

$$AP = BP \text{ より}$$

$$AP^2 = BP^2$$

$$1+4+(z-1)^2 = 1+16+(z+3)^2$$

$$z^2 - 2z + 6 = z^2 + 6z + 26$$

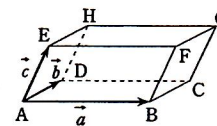
$$-8z = 20$$

$$z = -\frac{5}{2}$$

よって

$$(0, 0, -\frac{5}{2})$$

[4] 向かい合う3組の面がそれぞれ平行である平行六面体ABCD-EFGHにおいて、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおき、対角線AGの中点をMとする。このとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{CE}$ (2) $\overrightarrow{HB}$ (3) $\overrightarrow{AM}$

$$(1) \overrightarrow{CE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$(2) \overrightarrow{HB} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

$$(3) \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$$

[5] 3点A(1, 1, 0), B(0, 2, 2), C(1, 2, 1)を頂点とする△ABCにおいて、∠BACの大きさθを求めよ。

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 2-1, 2-0)$$

$$= (-1, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1, 2-1, 1-0)$$

$$= (0, 1, 1)$$

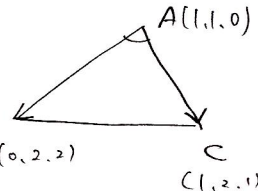
$$\text{よって } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より } \theta = 30^\circ$$



[6] 4点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$), D($\vec{d}$)を頂点とする四面体ABCDにおいて、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。ただし、△ABCの重心をGとする。

(1) 辺ACを3:2に内分する点をP, 辺BDを3:2に外分する点をQとするととき $\overrightarrow{PQ}$

$$\vec{P} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{c}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

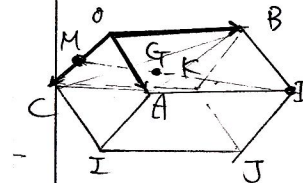
$$\vec{Q} = \frac{-2\vec{b} + 3\vec{d}}{3-2} = -2\vec{b} + 3\vec{d}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = (-2\vec{b} + 3\vec{d}) - (\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{c}) = -\frac{2}{5}\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{3}{5}\vec{c} + 3\vec{d}$$

(2) 線分GDを1:3に内分する点をF($\vec{f}$)とするととき $\vec{f}$

$$\vec{f} = \frac{3\vec{g} + 1 \cdot \vec{d}}{1+3} = \frac{1}{4} (3 \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} + \vec{d}) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$$

[7] 平行六面体OADB-CIJKにおいて、△ABCの重心をG, 辺OCの中点をMとすると、3点D, G, Mは一直線上にあることを証明せよ。



$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$$

とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM} \\ &= \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= 3(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

よって 3点 D, G, M は 同一直線上にある。

8 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 原点を中心とし、点(2, 1, -3)を通る球面

$$\text{半径 } \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$x^2+y^2+z^2=14$$

$$\sqrt{14}^2 \text{ 也可}$$

(2) 2点A(5, 3, -2), B(-1, 3, 2)を直径の両端とする球面

$$\text{中心} = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{0}{2} \right)$$

$$\therefore (2, 3, 0)$$

$$\text{半径 } \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}$$

$$\text{よって } (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13$$

$$\sqrt{13}^2 \text{ 也可}$$

9 球面 $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 3^2$ と yz 平面が交わる部分は円である。その中心の座標と半径を求めよ。

$$x=0$$

$$x=0 \text{ 代入}$$

$$1 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$(y-4)^2 + (z-2)^2 = 8$$

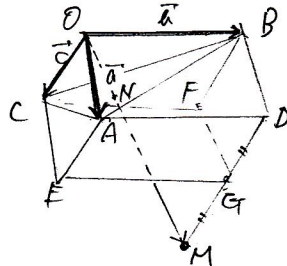
$$\text{中心 } (0, 4, 2) \quad \text{半径 } 2\sqrt{2}$$

$$\uparrow$$

$$\text{半径 } 2$$

10 平行六面体OADB-CEGFにおいて、辺DGのGを越える延長上にGM=GDとなる点Mをとり、直線OMと平面ABCの交点をNとする。

$\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}, \vec{OC}=\vec{c}$ とするとき、 $\vec{ON}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。



$$\vec{OM} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$$

点NはOM上にある

$$\vec{ON} = k\vec{OM}$$

$$= k\vec{a} + k\vec{b} + 2k\vec{c}$$

点Nは平面ABC上にあるから

$$k+k+2k=1$$

$$k = \frac{1}{4}$$

$$(k=\frac{1}{4}, 2)$$

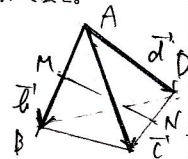
$$\vec{ON} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\text{約分が } -1$$

11 1辺の長さが2の正四面体ABCDにおいて、2辺AB, CDの中点をそれぞれM, Nとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{AB}=\vec{b}, \vec{AC}=\vec{c}, \vec{AD}=\vec{d}$ とするとき、 $\vec{MN}$ を $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ を用いて表せ。

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{AN} - \vec{AM} \\ &= \frac{\vec{AC} + \vec{AD}}{2} - \frac{1}{2}\vec{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} \end{aligned}$$



(2) $AB \perp MN$ が成り立つことを証明せよ。

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{MN} &= \vec{b} \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{d} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 2$$

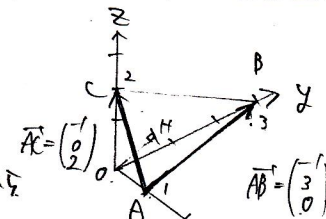
$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{MN} &= (-2 + 1 + 1) = 0 \\ \therefore \vec{AB} &\perp \vec{MN} \end{aligned}$$

12 3点A(1, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 2)が定める平面αに原点Oから垂線OHを下ろす。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 点Hの座標を求めよ。



$$\vec{OH} = r\vec{OA} + s\vec{OB} + t\vec{OC}$$

$$\text{よって}$$

点Hは平面ABC上にある

$$r+s+t=1 \quad \text{--- (1)}$$

$$\vec{OH} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 3s \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OH} \perp \vec{AB} \text{ より } \vec{OH} \cdot \vec{AB} = -r + 9s = 0$$

$$s = \frac{1}{9}r \quad \text{--- (2)}$$

$$\vec{OH} \perp \vec{AC} \text{ より } \vec{OH} \cdot \vec{AC} = -r + 4t = 0$$

$$t = \frac{1}{4}r \quad \text{--- (3)}$$

①, ②, ③より

$$r + \frac{1}{9}r + \frac{1}{4}r = 1$$

$$\frac{49}{36}r = 1$$

$$\therefore r = \frac{36}{49}$$

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(1) より

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{\left(\frac{36}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2 + \left(\frac{18}{49}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{6^2(6^2+2^2+3^2)}{49^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{6}{49} \times 7 = \frac{6}{7}$$

$\therefore$ 四面体OABCの体積Vは、

$$V = \frac{1}{3} \times OC \times \triangle OAB$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = 1$$

$$\text{また } V = \frac{1}{3} \times OH \times \triangle ABC$$

$$1 = \frac{1}{3} \times \frac{6}{7} \times \triangle ABC$$

$$\triangle ABC = \frac{7}{2}$$