数学演習（空間ベクトル）Ｈ２０．９．２　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．平行四辺形の3頂点が A(1, 1, -2), B(-2, 1, 2), C(3, -1, -3) であるとき，第4の頂点 D の座標を求めよ。

２．2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 3)$ と $\vec{b}=(1,\ -1,\ 0)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

３．3点 A(-3, 1, 2), B(-2, 3, 1), C(-1, 2, 3) について，$\angle \mathrm{BAC}=\theta$ とおく。ただし $0^\circ<\theta<180^\circ$ とする。

(1)　θ を求めよ。

(2)　$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

４．四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。線分 AB を 1 : 2 に内分する点を L，線分 BC の中点を M とする。線分 AM と線分 CL の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

5．平行六面体 ABCD-EFGH において，辺 AB，AD の中点を，それぞれ P，Q とし，平行四辺形 EFGH の対角線の交点を R とすると，平行六面体の対角線 AG は △PQR の重心 K を通ることを証明せよ。

6．四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。

(1) 線分 AB を 1 : 2 に内分する点を P とし，線分 PC を 2 : 3 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) D，E，F はそれぞれ線分 OA，OB，OC 上の点で，$\mathrm{OD}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}$，$\mathrm{OE}=\frac{2}{3}\mathrm{OB}$，$\mathrm{OF}=\frac{1}{3}\mathrm{OC}$ とする。3 点 D，E，F を含む平面と線分 OQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

7．$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\mathrm{OA}=2$ である四面体 OABC において，頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする。垂線 OH の長さを求めよ。

8．次の球面の方程式を求めよ。

(1) 点 A (1，−2，3) を中心とし，点 B (2，−1，−1) を通る球面

(2) 2 点 A (3，2，−4)，B (−1，2，0) を直径の両端とする球面

(3) 点 (3，−5，2) を中心とし，xy 平面に接する球面

数学演習（空間ベクトル）Ｈ２０．９．２解答

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．D$(a,\ b,\ c)$ とする。

[1]　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ のとき　$\overrightarrow{AB}=(-3,\ 0,\ 4)$，$\overrightarrow{CD}=(a-3,\ b+1,\ c+3)$ であるから

$-3=a-3,\ 0=b+1,\ 4=c+3$

よって，$a=0,\ b=-1,\ c=1$ であり　D$(0,\ -1,\ 1)$

[2]　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ のとき　$\overrightarrow{DC}=(3-a,\ -1-b,\ -3-c)$ であるから

$-3=3-a,\ 0=-1-b,\ 4=-3-c$

よって，$a=6,\ b=-1,\ c=-7$ であり　D$(6,\ -1,\ -7)$

[3]　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ のとき　$\overrightarrow{AC}=(2,\ -2,\ -1)$，$\overrightarrow{DB}=(-2-a,\ 1-b,\ 2-c)$ であるから

$2=-2-a,\ -2=1-b,\ -1=2-c$

よって，$a=-4,\ b=3,\ c=3$ であり　D$(-4,\ 3,\ 3)$

別解　四角形が平行四辺形であるための条件は，対角線がそれぞれの中点で交わることである。

[1]　対角線が BC，AD の場合

対角線 BC の中点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，

対角線 AD の中点の座標は　$\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+1}{2},\ \dfrac{c-2}{2}\right)$

これらが一致することから　$a=0,\ b=-1,\ c=1$　　ゆえに　D$(0,\ -1,\ 1)$

[2] 対角線が AC，BD，[3] 対角線が AB，CD の場合も同様（解答は省略）。

２．求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$，$\vec{b}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$

よって　$2x+y+3z=0$ ……①，$x-y=0$ ……②

また，$|\vec{e}|=1$ であるから　$x^2+y^2+z^2=1$ ……③

② から　$y=x$　　ゆえに，① から　$z=-x$　　よって，③ から　$x^2+x^2+(-x)^2=1$

ゆえに　$3x^2=1$　　よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このとき　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$z=\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$（複号同順）

したがって，求める単位ベクトルは

$$\vec{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

３．(1)　$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ -1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 1)$ であるから

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

また　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2+2\times1+(-1)\times1=3$

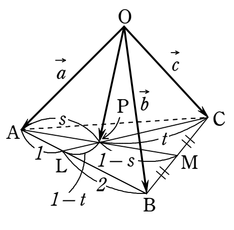
よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

(2)　△ABC の面積を S とおくと，(1) から

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

４．$\overrightarrow{OL}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$



$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

AP : PM $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OM}$

$=(1-s)\vec{a}+s\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)$

$=(1-s)\vec{a}+\dfrac{1}{2}s\vec{b}+\dfrac{1}{2}s\vec{c}$　……①

CP : PL $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OL}=(1-t)\vec{c}+t\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)$

$=\dfrac{2}{3}t\vec{a}+\dfrac{1}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$　……②

①，② から　$(1-s)\vec{a}+\dfrac{1}{2}s\vec{b}+\dfrac{1}{2}s\vec{c}=\dfrac{2}{3}t\vec{a}+\dfrac{1}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

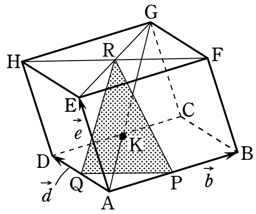
4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$1-s=\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{2}s=\dfrac{1}{3}t,\ \dfrac{1}{2}s=1-t$

これを解いて　$s=\dfrac{1}{2},\ t=\dfrac{3}{4}$

ゆえに　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

５．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とすると



$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\vec{b}}{2}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\vec{d}}{2}$

また　$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

点 R は対角線 EG の中点であるから

$\overrightarrow{AR}=\dfrac{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{2}$

ゆえに，△PQR の重心 K について

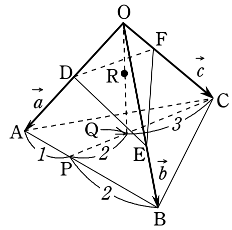
$\overrightarrow{AK}=\dfrac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{d}}{2}+\dfrac{\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{2}\right)$

$=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}$

よって　$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AK}$

したがって，対角線 AG は △PQR の重心 K を通る。

６．(1)　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OC}}{2+3}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OC}$



$=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$

(2)　点 R は直線 OQ 上にあるから，k を実数とすると

$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$ と表される。よって，(1) から

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{2}{5}k\vec{a}+\dfrac{1}{5}k\vec{b}+\dfrac{2}{5}k\vec{c}$　……①

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから

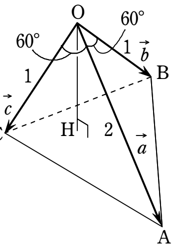
$\overrightarrow{OR}=\dfrac{2}{5}k\cdot2\overrightarrow{OD}+\dfrac{1}{5}k\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OE}+\dfrac{2}{5}k\cdot3\overrightarrow{OF}$

$=\dfrac{4}{5}k\overrightarrow{OD}+\dfrac{3}{10}k\overrightarrow{OE}+\dfrac{6}{5}k\overrightarrow{OF}$

点 R は平面 DEF 上にあるから　$\dfrac{4}{5}k+\dfrac{3}{10}k+\dfrac{6}{5}k=1$　　よって　$k=\dfrac{10}{23}$

① に代入して　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{4}{23}\vec{a}+\dfrac{2}{23}\vec{b}+\dfrac{4}{23}\vec{c}$

７．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。



点 H は平面 ABC 上にあるから，$s,\ t,\ u$ を実数として

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c},\ s+t+u=1$

と表される。OH⊥(平面 ABC) から

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$,　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$　……①,

$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$　……②

ここで　$|\vec{a}|^2=4$，$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot1\cdot\cos60^\circ=1$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

① から　$-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$3s+u=0$　……③

同様に，② から　$3s+t=0$　……④

③，④ および $s+t+u=1$ を解いて　$s=-\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{3}{5}$，$u=\dfrac{3}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=-\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

よって　$5^2|\overrightarrow{OH}|^2=|-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{c}-6\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=4+9\cdot1+9\cdot1-6\cdot1+18\cdot0-6\cdot1=10$

ゆえに　$|\overrightarrow{OH}|^2=\dfrac{10}{5^2}$　　したがって　$\mathrm{OH}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

８．(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+\{-1-(-2)\}^2+(-1-3)^2}=3\sqrt{2}$

よって，求める球面の方程式は

$(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2+(z-3)^2=(3\sqrt{2})^2$

したがって　$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=18$

(2)　線分 AB の中点 M が球面の中心であるから

M$\left(\dfrac{3-1}{2},\ \dfrac{2+2}{2},\ \dfrac{-4+0}{2}\right)$　すなわち　M$(1,\ 2,\ -2)$

また　$\mathrm{AM}=\sqrt{(1-3)^2+(2-2)^2+\{-2-(-4)\}^2}=2\sqrt{2}$

よって，求める球面の方程式は

$(x-1)^2+(y-2)^2+\{z-(-2)\}^2=(2\sqrt{2})^2$

したがって　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=8$

(3)　中心の z 座標が 2 であるから，球面の半径は　2

よって，求める球面の方程式は

$(x-3)^2+\{y-(-5)\}^2+(z-2)^2=2^2$

したがって　$(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=4$