数学演習（平面ベクトル）Ｈ２３．９．３０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．△OABに対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s，t は実数) とする。s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，点Pの描く図形を図示せよ。

(1)　$s+t=3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　(2)　$s+t\leqq\frac{1}{3}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(3)　$5s+2t=3$　　(4)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

２．次の不等式を満たす領域を図示せよ。

(1)　$x+y=3$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$　　(2)　$x+y\leqq\frac{1}{3}$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$

(3)　$5x+2y=3$　　(4)　$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$

３．次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点A $(-1,\ 2)$を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ -3)$ に平行な直線

(2)　点A $(4,\ 6)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(3,\ -4)$ に垂直な直線

４．円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

5．2 点 (3，4)，(5，-2) を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

6．点 (3，1) を通り，円 $x^2+y^2=2$ に接する直線の方程式を求めよ。

7．$x^2-7y^2+6xy-12x-4y+20$ を因数分解せよ。

8．AB$=5$，BC$=6$，CA$=7$ である △ABC の内心を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

9．△OAB において，点 O から辺 AB へ垂線 OH を下ろす。OA$=3$，OB$=2$，∠AOB$=60°$ であるとき，AH : HB を求めよ。

10. OA$=3$，OB$=2$，∠AOB$=60°$ である △OAB において，その外心を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

11. 点 P(4, 5) から直線 ℓ : $x+2y=12$ に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトルを用いて，点 H の座標を求めよ。

(2) 点 P と直線 ℓ の距離を求めよ。

12. 次の 2 直線のなす鋭角を求めよ。 $x-2y+4=0$, $3x-y-3=0$

13. 正六角形 ABCDEF において，辺 AB, BC, CD, DE, EF, FA の中点をそれぞれ P, Q, R, S, T, U とする。△PRT の重心と △QSU の重心は一致することを証明せよ。

14. △ABC において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。**（2 通りの方法で解くこと）**

15. $\triangle$ABC と 点 P について，等式 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。直線 AP と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。（２通りの方法で解くこと）

(1)　BD : DC　　　(2)　AP : PD

(3)　$\triangle$PBC : $\triangle$PCA : $\triangle$PAB

16. $\triangle$OAB において，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を C，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を D とし，直線 OD と辺 AB の交点を E とする。このとき，OD : DE を求めよ。（２通りの方法で解くこと）

17. AB＝1，AC＝2 である $\triangle$ABC がある。辺 BC を 2 : 1 に内分する点をP，線分 AP を 2 : 3 に内分する点を Q とすると，$\overrightarrow{BQ}=$ ア$\boxed{}$ $\overrightarrow{AB}+$ イ$\boxed{}$ $\overrightarrow{AC}$ である。

更に，$\overrightarrow{BQ}$，$\overrightarrow{AP}$ が直交するとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ウ$\boxed{}$ となり，$\cos\angle BAC=$ エ$\boxed{}$ である。

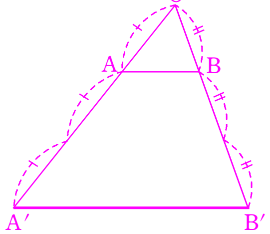
1． △OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$s$，$t$ は実数）とする。s，t が次の条件を満たしながら変化するとき，点 P の描く図形を図示せよ。

(1)　$s+t=3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　　(2)　$s+t\leqq\dfrac{1}{3}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

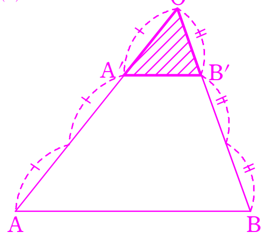
(3)　$5s+2t=3$　　　(4)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

解答　(1)，(2)　[図]　(2) は境界線を含む

(1)

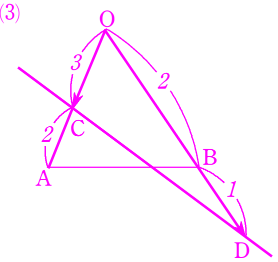


(2)

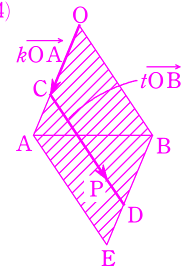


(3)　[図]　直線 CD　　(4)　[図]　斜線部分。境界線を含む

(3)



(4)



(1)　$s+t=3$ から　　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{3}=1$

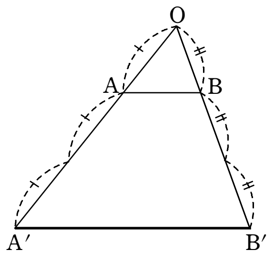
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{3}=t'$，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，

$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，点 P が描く図形は線分 A′B′　[図]



(2)　$s+t\leqq\dfrac{1}{3}$ から　　$3s+3t\leqq 1$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

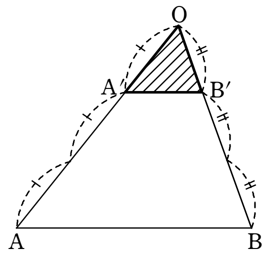
$=3s\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right)+3t\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$

ここで，$3s=s'$，$3t=t'$，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，

$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，点 P が描く図形は △OA′B′ の周および内部　[図]



(3)　$5s+2t=3$ から　$\dfrac{5}{3}s+\dfrac{2}{3}t=1$

また　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{5}{3}s\cdot\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}t\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

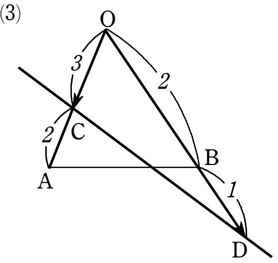
$\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，

$\dfrac{5}{3}s=s'$，$\dfrac{2}{3}t=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OC}+t'\overrightarrow{OD}$，$s'+t'=1$

よって，点 P の存在範囲は 図 (3) の直線 CD

(3)



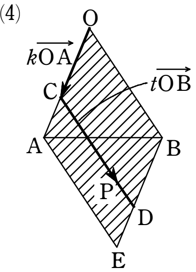
(4)　$s=k$（$0\leqq k\leqq 1$）とおくと　$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BD}$　とおくと　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}$（$0\leqq t\leqq 1$）

よって，P は図の線分 CD 上を動く。

更に，k が 0 から 1 まで変化すると，C は O から A まで動き，点 P の存在範囲は右の図の平行四辺形 OAEB の周および内部。

(4)



2． 次の不等式を満たす領域を図示せよ。

(1)　$x+y=3$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$　　　(2)　$x+y\leqq\dfrac{1}{3}$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$

(3)　$5x+2y=3$　　　(4)　$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$

解答　(1)　[図]　直線 $x+y=3$ の $0\leqq x\leqq 3$ の部分

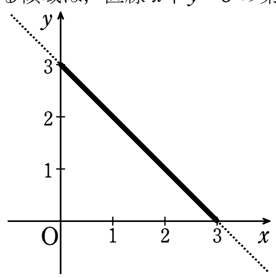
(2)　[図]　斜線部分。境界線を含む

(3)　[図]　直線 $5x+2y=3$

(4)　[図]　斜線部分。境界線を含む

(1)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$　より第 1 象限内（軸上も含む）を考える。

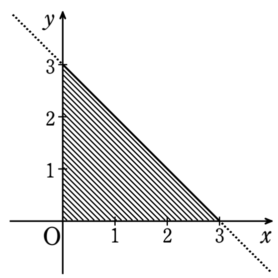
したがって求める領域は，直線 $x+y=3$ の第 1 象限の中の部分（軸上も含む）



(2)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$　より第 1 象限内（軸上も含む）を考える。

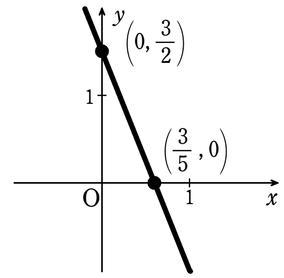
また，$x+y\leqq 3$　より　$y\leqq -x+3$　なので，直線 $y=-x+3$ よりも下側の部分

ゆえに，求める領域は図の斜線部分（境界も含む）



(3)　$5x+2y=3$　より　$y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$　となる。

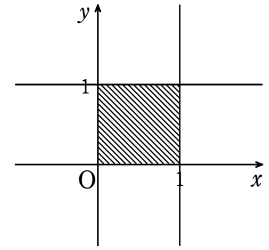
したがって，求める領域は図の直線



(4)　$0\leqq x\leqq 1$　より　2 直線 $x=0$ と $x=1$ の間（境界を含む）であり，かつ

$0\leqq y\leqq 1$　より　2 直線 $y=0$ と $y=1$ の間（境界を含む）である部分なので，

図の斜線部分である。ただし，境界を含む



3． 次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 A $(-1,\ 2)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ -3)$ に平行な直線

(2)　点 A $(4,\ 6)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(3,\ -4)$ に垂直な直線

解答　(1)　$3x+2y=1$　　(2)　$3x-4y+12=0$

直線上の任意の点を P $(x,\ y)$ とする。

(1)　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$ から　　$(x,\ y)=(-1,\ 2)+t(2,\ -3)=(-1+2t,\ 2-3t)$

よって　　$x=-1+2t$　……①，　$y=2-3t$　……②

①×3+②×2 から　　$3x+2y=1$

(2)　$\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ であるから　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

ここで　　$\overrightarrow{AP}=(x-4,\ y-6)$

よって　　$3\times(x-4)-4\times(y-6)=0$

したがって　　$3x-4y+12=0$

4． 円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=43$

円の中心 $(2,\ 3)$ と点 $(5,\ 7)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{7-3}{5-2}=\dfrac{4}{3}$

求める接線は，この直線に垂直で，点 $(5,\ 7)$ を通るから，その方程式は

$y-7=-\dfrac{3}{4}(x-5)$　　すなわち　$3x+4y=43$

別解　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ ……① を，
中心 $(2,\ 3)$ が原点 $(0,\ 0)$ にくるように平行移動すると

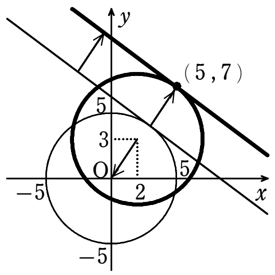
$$円\ x^2+y^2=25 \quad \cdots\cdots ②$$

になる。
この平行移動により，円①上の点 $(5,\ 7)$ は点 $(3,\ 4)$ に移る。
点 $(3,\ 4)$ における円②の接線の方程式は

$$3x+4y=25 \quad \cdots\cdots ③$$

求める接線は，③を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，その方程式は

$$3(x-2)+4(y-3)=25 \qquad すなわち \qquad 3x+4y=43$$

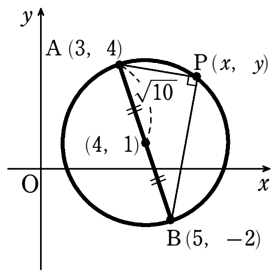


5．2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

解答　$(x-4)^2+(y-1)^2=10$

この円の中心は，2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を結ぶ線分の中点であるから，その座標は　$(4,\ 1)$
半径 r は中心 $(4,\ 1)$ と円上の点 $(3,\ 4)$ との距離であるから　$r^2=(4-3)^2+(1-4)^2=10$
よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$



6．点 $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=2$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　$x+7y-10=0$，$x-y-2=0$

接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1{}^2+y_1{}^2=2 \quad \cdots\cdots ①$$

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=2$$

この直線が点 $(3,\ 1)$ を通るから

$$3x_1+y_1=2 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から y_1 を消去して整理すると

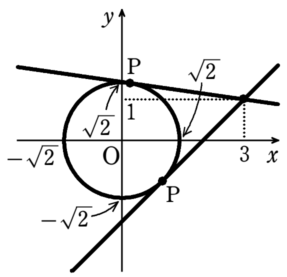
$$5x_1{}^2-6x_1+1=0$$

よって　$(5x_1-1)(x_1-1)=0$　　ゆえに　$x_1=\dfrac{1}{5},\ 1$

② に代入して　$x_1=\dfrac{1}{5}$ のとき　$y_1=\dfrac{7}{5}$，　$x_1=1$ のとき　$y_1=-1$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$x+7y=10,\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right);\ x-y=2,\ (1,\ -1)$$



別解 1　点 $(3,\ 1)$ を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，傾きを m とすると次のようにおける。

$$y-1=m(x-3) \quad すなわち \quad y=mx-(3m-1) \quad \cdots\cdots ③$$

③ を円の方程式に代入して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2m(3m-1)x+9m^2-6m-1=0 \quad \cdots\cdots ④$$

$m^2+1 \neq 0$ であるから，2 次方程式④の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-m(3m-1)\}^2-(m^2+1)(9m^2-6m-1)$$

$$=-7m^2+6m+1=-(7m+1)(m-1)$$

円と直線③が接するための条件は　$D=0$

よって　$-(7m+1)(m-1)=0$　　ゆえに　$m=-\dfrac{1}{7},\ 1$

$m=-\dfrac{1}{7}$ のとき，④の重解は　$x=\dfrac{m(3m-1)}{m^2+1}=\dfrac{1}{5}$

$m=1$　のとき，④の重解は　$x=1$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$y=-\frac{1}{7}x+\frac{10}{7},\ \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right);\ y=x-2,\ (1,\ -1)$$

別解 2　（別解 1 と 3 行目まで同じ）
③ から　$mx-y-3m+1=0$ ……⑤
円の中心 $(0,\ 0)$ と接線の距離が円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいから

$$\frac{|m\cdot 0-0-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

両辺に $\sqrt{m^2+1}$ を掛けて　$|-3m+1|=\sqrt{2(m^2+1)}$

両辺を 2 乗して整理すると　$7m^2-6m-1=0$

よって　$(7m+1)(m-1)=0$　　ゆえに　$m=-\dfrac{1}{7},\ 1$

$m=-\dfrac{1}{7}$ のとき，⑤ は　$x+7y-10=0$ ……⑥

直線 OP は $y=7x$ と表されるから，⑥ と連立させて解くと，接点の座標は

$$\left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$$

$m=1$ のとき，⑤ は　$x-y-2=0$ ……⑦

直線 OP は $y=-x$ と表されるから，⑦ と連立させて解くと，接点の座標は

$$(1,\ -1)$$

7．$x^2-7y^2+6xy-12x-4y+20$ を因数分解せよ。

解答　$(x-y-2)(x+7y-10)$

x の式とみても，y の式とみても 2 次式なので，x について降べきの順に整理する。

$$x^2-7y^2+6xy-12x-4y+20=x^2+(6y-12)x-(7y^2+4y-20)$$

$$=x^2+(6y-12)x-(7y-10)(y+2)$$

$$\begin{array}{ccccc} 7 & \times & -10 & \longrightarrow & -10 \\ 1 & & 2 & \longrightarrow & 14 \\ \hline 7 & & -20 & & 4 \end{array}$$

また，全体を x の式とみて因数分解すると

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(y+2) & \longrightarrow & -y-2 \\ 1 & & 7y-10 & \longrightarrow & 7y-10 \\ \hline & & & & 6y-12 \end{array}$$

よって $x^2+(6y-12)x-(7y-10)(y+2)=\{x-(y+2)\}\{x+(7y-10)\}$

$$=(x-y-2)(x+7y-10)$$

8．$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{CA}=7$ である △ABC の内心を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{7}{18}\vec{b}+\dfrac{5}{18}\vec{c}$

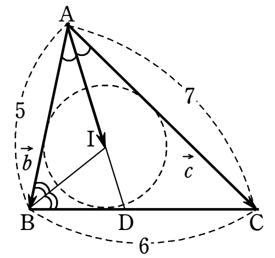
直線 AI と辺 BC の交点を D とすると
AD は ∠A の二等分線より

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$

が成り立つ。よって，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=5:7$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5+7}$

$$=\frac{7}{12}\vec{b}+\frac{5}{12}\vec{c}$$



また　$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=5:7$ より $\mathrm{BD}=\dfrac{5}{5+7}\mathrm{BC}=\dfrac{5}{12}\times 6=\dfrac{5}{2}$

ゆえに △BDA において，BI は ∠DBA の二等分線より

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=5:\frac{5}{2}=2:1$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{2}{2+1}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{12}\vec{b}+\dfrac{5}{12}\vec{c}\right)=\dfrac{7}{18}\vec{b}+\dfrac{5}{18}\vec{c}$

9．△OAB において，点 O から辺 AB へ垂線 OH を下ろす。$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60°$ であるとき，$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}$ を求めよ。

解答　$6:1$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$

$\mathrm{OH}\perp\mathrm{AB}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって　$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

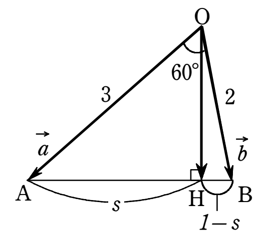
ゆえに　$(s-1)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2+(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ここで　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times 2\times\cos 60°=3$$

よって　$(s-1)\times 3^2+s\times 2^2+(1-2s)\times 3=0$

これを解いて　$s=\dfrac{6}{7}$　　したがって　$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=\dfrac{6}{7}:\left(1-\dfrac{6}{7}\right)=6:1$



10．$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60°$ である △OAB において，その外心を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s$，$t$ は実数）とおく。
辺 OA，OB の中点をそれぞれ M，N とすると
外心 P は各辺の垂直二等分線の交点であるので

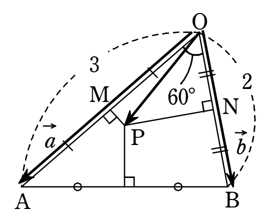
$$\mathrm{PM}\perp\mathrm{OA},\ \mathrm{PN}\perp\mathrm{OB}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ ……①

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-(s\vec{a}+t\vec{b})$

$$=\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{a}-t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{b}-(s\vec{a}+t\vec{b})=-s\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}$$



① から　$\left\{\left(\dfrac{1}{2}-s\right)\vec{a}-t\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}=0$，　$\left\{-s\vec{a}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{2}-s\right)|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，　$-s\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2=0$

ここで，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos60^\circ=3$

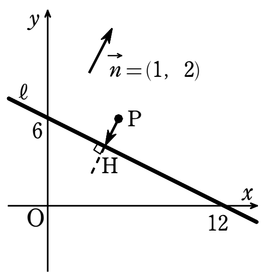
よって　$3^2\cdot\left(\frac{1}{2}-s\right)-3t=0$，$-3s+2^2\cdot\left(\frac{1}{2}-t\right)=0$

整理すると　$6s+2t=3$，$3s+4t=2$　これを解いて　$s=\frac{4}{9}$，$t=\frac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$

11. 点 P(4，5) から直線 ℓ ：$x+2y=12$ に垂線を引き，その交点を H とする。
(1)　ベクトルを用いて，点 H の座標を求めよ。
(2)　点 P と直線 ℓ の距離を求めよ。

解答　(1)　$\left(\frac{18}{5},\ \frac{21}{5}\right)$　(2)　$\frac{2\sqrt{5}}{5}$



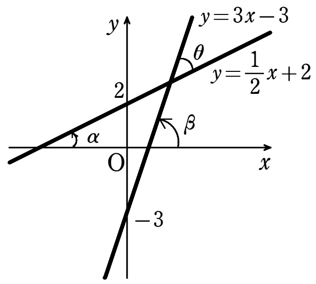
(1)　点 H の座標を $(s,\ t)$ とする。
$\vec{n}=(1,\ 2)$ とすると，$\vec{n}$ は直線 ℓ の法線ベクトルであるから　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\,/\!/\,\vec{n}$
よって，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k\vec{n}$ となる実数 k がある。
ここで　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(s-4,\ t-5)$
ゆえに　$(s-4,\ t-5)=k(1,\ 2)$
よって　$s-4=k$　…… ①，$t-5=2k$　…… ②
①×2－② から　$2s-t=3$　…… ③
また，点 H は直線 ℓ 上にあるから　$s+2t=12$　…… ④
③，④ を解いて　$s=\frac{18}{5}$，$t=\frac{21}{5}$
したがって，点 H の座標は　$\left(\frac{18}{5},\ \frac{21}{5}\right)$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\left(\frac{18}{5}-4,\ \frac{21}{5}-5\right)=\left(-\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$
点 P と直線 ℓ の距離は $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$ に等しいから
$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{20}{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

注意　$\vec{a}=k\vec{b}$ (k は実数) のとき　$|\vec{a}|=|k||\vec{b}|$　(両辺に絶対値をつけただけ)
これを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\frac{2}{5}(1,\ 2)$ であるから
$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\left|-\frac{2}{5}\right|\sqrt{1^2+2^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$　と求めてもよい。

12. 次の 2 直線のなす鋭角を求めよ。　$x-2y+4=0$，$3x-y-3=0$

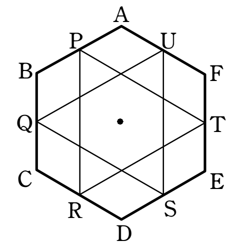
解答　$\frac{\pi}{4}$



$x-2y+4=0$ から　$y=\frac{1}{2}x+2$
$3x-y-3=0$ から　$y=3x-3$
図のように，2 直線が x 軸の正の向きとなす角を，それぞれ α，β $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると，
2 直線のなす鋭角 θ は，$\beta-\alpha$ である。
$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=3$ であるから
$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$
よって，求める鋭角 θ は　$\theta=\frac{\pi}{4}$

13. 正六角形 ABCDEF において，辺 AB，BC，CD，DE，EF，FA の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする。△PRT の重心と △QSU の重心は一致することを証明せよ。

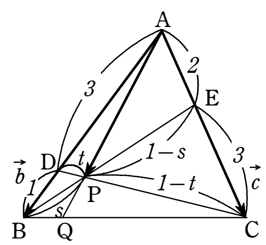
解答　略



点 A，B，C，D，E，F の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ とし，
△PRT，△QSU の重心の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{g_1}$，$\vec{g_2}$ とすると
$$\vec{g_1}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f})$$
$$\vec{g_2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OU}}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}+\frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f})$$
よって　$\vec{g_1}=\vec{g_2}$
したがって，△PRT の重心と △QSU の重心は一致する。

14. △ABC において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 2 : 3 に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。**（２通りの方法で解くこと）**

解答　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{9}{14}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$



BP : PE $=s:(1-s)$ とすると
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-s)\vec{b}+\frac{2}{5}s\vec{c}$　…… ①
DP : PC $=t:(1-t)$ とすると
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$
よって　$(1-s)\vec{b}+\frac{2}{5}s\vec{c}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$
$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{b}$，$\vec{c}$ は平行でないから
$1-s=\frac{3}{4}(1-t)$，$\frac{2}{5}s=t$

これを解いて　$s=\frac{5}{14}$，$t=\frac{1}{7}$
$s=\frac{5}{14}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{9}{14}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$

別解
BP : PE $=s:(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　…… ①とおける。
ここで　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　より
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　を①に代入して
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\cdot\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+s\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{3}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{2}{5}s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　…… ②
となる。すると　点Pは直線DC上にあるから②の係数について
$\frac{4}{3}(1-s)+\frac{2}{5}s=1$
が成り立つ。解いて　$s=\frac{5}{14}$　より　②に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{9}{14}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$

15. △ABC と 点 P について，等式 $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が成り立っている。直線 AP と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。**（２通りの方法で解くこと）**
(1)　BD : DC　　(2)　AP : PD
(3)　△PBC : △PCA : △PAB

解答　(1)　4 : 3　(2)　7 : 2　(3)　2 : 3 : 4

(1)　$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ から
$-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+4(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$
よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}$
ゆえに，　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4+3}$　より　BD : DC $=4:3$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　よって　AP : PD $=7:2$

別解
A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ　$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{p}$　とする。
$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ から　$2(\vec{a}-\vec{p})+3(\vec{b}-\vec{p})+4(\vec{c}-\vec{p})=\vec{0}$
よって　$\vec{p}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}}{9}=\frac{2\vec{a}+7\cdot\frac{3\vec{b}+4\vec{c}}{7}}{9}$
より，$\vec{d}=\frac{3\vec{b}+4\vec{c}}{7}$　とおくと，$\vec{d}$はDの位置ベクトルより　BD : DC $=4:3$
また，$\vec{p}=\frac{2\vec{a}+7\vec{d}}{9}$　より　AP : PD $=7:2$

(3)　$\triangle PBD : \triangle PCD = BD : DC = 4 : 3$

よって，$\triangle PBD = 4S$，$\triangle PCD = 3S$ とおくと

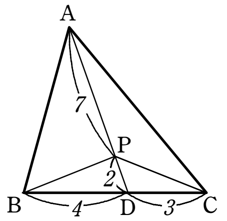
$\triangle PBC = \triangle PBD + \triangle PCD = 4S + 3S = 7S$

また　　$\triangle PCA : \triangle PCD = AP : PD = 7 : 2$

ゆえに　　$\triangle PCA = \dfrac{7}{2}\triangle PCD = \dfrac{7}{2} \times 3S = \dfrac{21}{2}S$

更に　　$\triangle PAB : \triangle PBD = AP : PD = 7 : 2$

よって　　$\triangle PAB = \dfrac{7}{2}\triangle PBD = \dfrac{7}{2} \times 4S = 14S$



したがって　　$\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = 7S : \dfrac{21}{2}S : 14S = 2 : 3 : 4$

参考　$\triangle ABC$の面積をSとおいてもよい。

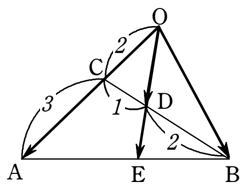
16. $\triangle OAB$において，辺 OA を 2 : 3 に内分する点を C，線分 BC を 2 : 1 に内分する点を D とし，直線 OD と辺 AB の交点を E とする。このとき，OD : DE を求めよ。（２通りの方法で解くこと）

解答　3 : 2

CD : DB=1 : 2 であるから

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2\overrightarrow{OC} + 1\cdot\overrightarrow{OB}}{1+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{4}{15}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$



点 E は直線 OD 上にあるから，$\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OD}$ となる実数 k がある。

よって　　$\overrightarrow{OE} = k\left(\dfrac{4}{15}\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{4}{15}k\overrightarrow{OA} + \dfrac{k}{3}\overrightarrow{OB}$

点 E は直線 AB 上にあるから　　$\dfrac{4}{15}k + \dfrac{k}{3} = 1$　　　したがって　　$k = \dfrac{5}{3}$

よって，$\overrightarrow{OE} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{OD}$ であるから　　OD : DE=3 : 2

別解

$$\overrightarrow{OD} = \frac{4}{15}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{4}{15}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{15}\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{4\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}}{15} = \frac{9}{15}\cdot\frac{4\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}}{9}$$

より　$\overrightarrow{OE} = \dfrac{4\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}}{9}$　より　AE : EB=5 : 4 であり

$\overrightarrow{OD} = \dfrac{9}{15}\overrightarrow{OE}$　つまり　$\overrightarrow{OD} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{OE}$　より　OD : DE=3 : 2

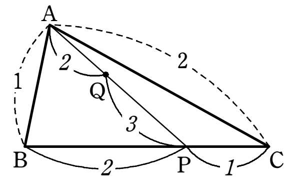
17. AB=1，AC=2 である $\triangle ABC$ がある。辺 BC を 2 : 1 に内分する点をP，線分 AP を 2 : 3 に内分する点を Q とすると，$\overrightarrow{BQ} =$ ア$\boxed{}$ $\overrightarrow{AB}+$ イ$\boxed{}$ $\overrightarrow{AC}$ である。

更に，$\overrightarrow{BQ}$，$\overrightarrow{AP}$ が直交するとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$ ウ$\boxed{}$ となり，$\cos\angle BAC =$ エ$\boxed{}$ である。

解答　（ア）$-\dfrac{13}{15}$　（イ）$\dfrac{4}{15}$　（ウ）$\dfrac{19}{22}$　（エ）$\dfrac{19}{44}$

$\overrightarrow{AP} = \dfrac{1\cdot\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{2+1} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}$ であるから

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\left(\frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}\right) = \frac{2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{15}$$



よって　　$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{15} - \overrightarrow{AB}$

$=$ ア $-\dfrac{13}{15}\overrightarrow{AB} +$ イ $\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BQ} \perp \overrightarrow{AP}$ のとき　　$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$

ゆえに　　$\left(\dfrac{-13\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{15}\right)\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}\right) = 0$

よって　　$(-13\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) = 0$

ゆえに　　$-13|\overrightarrow{AB}|^2 - 22\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 8|\overrightarrow{AC}|^2 = 0$

$|\overrightarrow{AB}| = 1$，$|\overrightarrow{AC}| = 2$ であるから　　$-13\cdot1^2 - 22\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 8\cdot2^2 = 0$

よって　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$ ウ $\dfrac{19}{22}$

したがって　　$\cos\angle BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{19}{22} \div (1\times2) =$ エ $\dfrac{19}{44}$