数学演習（存在範囲）Ｒ１．１１．２６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

1．△OABに対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。実数$s$，$t$が次の条件を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

(1)　$s+2t=3$　　(2)　$1\leqq s+t\leqq 2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

2．△OABに対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。実数$s$，$t$が次の条件を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を図示せよ。

(1)　$s+t=2$　　(2)　$5s+2t=3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　(3)　$-1<s+t<2$

3．△OABにおいて，次の条件を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$1\leqq s\leqq 2$，$0\leqq t\leqq 1$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s+t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

4．△OAB において，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$-1\leqq s\leqq 0$，$0\leqq 2t\leqq 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s+t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

5．平面上に 4 点 O，A，B，C があり，点 C は線分 OB 上にある。$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$ であり，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値は 1 である。また，$\angle\mathrm{ACB}=135^\circ$ である。

(1) $\angle\mathrm{AOB}=$ ア $\boxed{}$ である。また，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=$ イ $\boxed{}$，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=$ ウ $\boxed{}$ である。

(2) 点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ($l\geqq 0$，$m\geqq 0$，$n\geqq 0$，$l+m+n=2$) を満たしながら動く。このとき，点 P の存在範囲 D の面積は エ $\boxed{}$ である。

6．平面上に △ABC がある。実数 a，b，c は条件

(a) $a<0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c\fallingdotseq 0$

を満たし，点 P は $a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。また，辺 BC を $c:b$ に内分する点を D とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) a，b，c が条件 (a) を満たしながら動くとき，P の存在範囲を図示せよ。

7．平面上の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ を満たし，ベクトル $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ が表す点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とするとき

(1)　s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$0\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 P が描く図形の面積を求めよ。

(2)　s，t が $0\leqq s\leqq 3$，$1\leqq t\leqq 2$ を満たすとき，点 P が描く図形の面積を求めよ。

8．平面上で原点 O と 3 点 A$(3,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，C$(-1,\ 1)$ を考える。実数 s，t に対し，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定める。

(1)　s，t が条件 $-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 P$(x,\ y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。

(2)　点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ。

9．1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

1．△OABに対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めよ。

(1) $s+2t=3$　　(2) $1\leqq s+t\leqq 2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

解答　(1) $3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，直線CD

(2) $2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，台形ACDBの周と内部

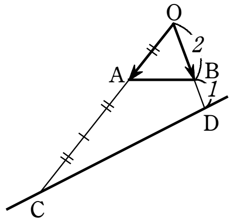
解説

(1) $s+2t=3$ から　$\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}t=1$

また　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}s(3\overrightarrow{OA})+\frac{2}{3}t\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

ゆえに，点Pの存在範囲は，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$

とすると，直線CDである。



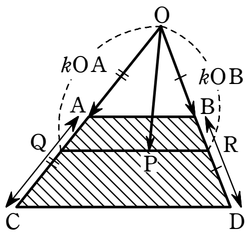
(2) $s+t=k$ $(1\leqq k\leqq 2)$ とおくと

$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$，$\frac{s}{k}\geqq 0$，$\frac{t}{k}\geqq 0$

また　$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$

よって，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OB}$ とすると，k が一定のとき点PはABに平行な線分QR上を動く。

ここで，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると，$1\leqq k\leqq 2$ の範囲で k が変わるとき，点Pの存在範囲は台形ACDBの周と内部である。

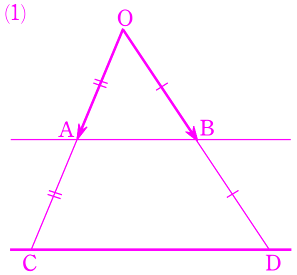


2．△OABに対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を図示せよ。

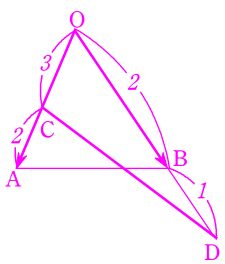
(1) $s+t=2$　　(2) $5s+2t=3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　(3) $-1<s+t<2$

解答　(1)［図］　(2)［図］　(3)［図］境界線を含まない

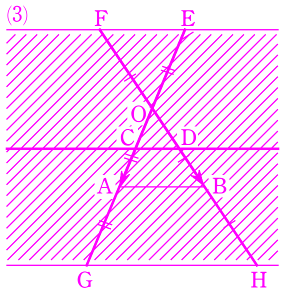
(1)



(2)



(3)



解説

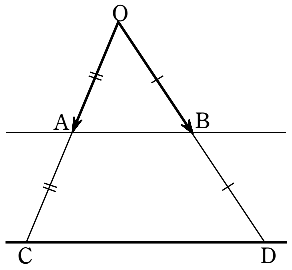
(1) $s+t=2$ から　$\frac{s}{2}+\frac{t}{2}=1$

また　$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA})+\frac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$

$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{s}{2}=s'$，$\frac{t}{2}=t'$ とすると

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OC}+t'\overrightarrow{OD}$，$s'+t'=1$

よって，点Pの存在範囲は直線CDである。［図］



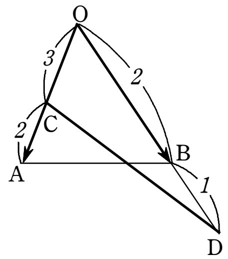
(2) $5s+2t=3$ から　$\frac{5}{3}s+\frac{2}{3}t=1$

また　$\overrightarrow{OP}=\frac{5}{3}s\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{2}{3}t\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{5}{3}s=s'$，$\frac{2}{3}t=t'$ とすると

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OC}+t'\overrightarrow{OD}$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，点Pの存在範囲は線分CDである。［図］



(3) $s+t=k$ $(k\neq 0,\ -1<k<2)$ とおくと

$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$，$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$

ゆえに，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{s}{k}=s'$，$\frac{t}{k}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OC}+t'\overrightarrow{OD}$，$s'+t'=1$

よって，Pは直線CD上を動く。

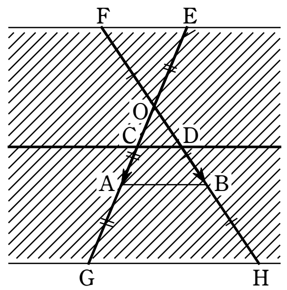
また，$k=0$ のとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{BA}$ $(=t\overrightarrow{AB})$ となり，PはOを通り，ABに平行な直線上を動く。

ここで，$-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}$，$-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OF}$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OG}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}$ とする。

k が -1 から2まで変化すると，Cは図のEからGまで，DはFからHまで動く。

ゆえに，Pの存在範囲は右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



3．△OABにおいて，次の条件を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$1\leqq s\leqq 2$，$0\leqq t\leqq 1$

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

解答　(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とすると，平行四辺形ADECの周と内部

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると，線分OB，OCを隣り合う2辺とする平行四辺形の周と内部

解説

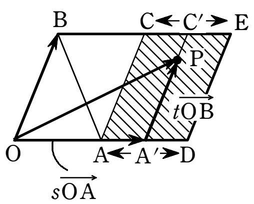
(1) s を固定して，$\overrightarrow{OA'}=s\overrightarrow{OA}$ とすると

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{OB}$

ここで，t を $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で変化させると，点Pは右の図の線分A′C′上を動く。

ただし，$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB}$

次に，s を $1\leqq s\leqq 2$ の範囲で変化させると，線分A′C′は図の線分ACからDEまで平行に動く。



ただし，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}$

よって，点Pの存在範囲は

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とすると，平行四辺形ADECの周と内部

である。

(2) $s\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}=s(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+t\overrightarrow{OB}$ であるから，

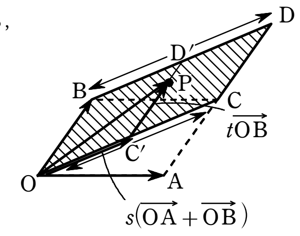
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

よって，点Pの存在範囲は

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると，線分OB，OCを隣り合う2辺とする平行四辺形の周と内部

である。



4．△OABにおいて，次の条件を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$-1\leqq s\leqq 0$，$0\leqq 2t\leqq 1$

(2) $\overrightarrow{OP}=(s-t)\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

解答　(1) $-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とすると，平行四辺形ODCEの周と内部

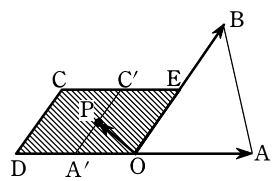
(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$ とすると，線分OC，ODを隣り合う2辺とする平行四辺形の周と内部

解説

(1) s を固定して，$\overrightarrow{OA'}=s\overrightarrow{OA}$ とすると　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{OB}$

ここで，$0\leqq 2t\leqq 1$ すなわち $0\leqq t\leqq \frac{1}{2}$ の範囲で t を変化させると，点Pは右の図の線分A′C′上を動く。

ただし，$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$



次に，$-1\leqq s\leqq 0$ の範囲で s を変化させると，線分A′C′は図の線分DCからOEまで平行に動く。

ただし，$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

ゆえに，点Pの存在範囲は

$-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$

とすると，平行四辺形ODCEの周と内部。

別解　$0\leqq -s\leqq 1$，$0\leqq 2t\leqq 1$ から，$-s=s'$，$2t=t'$ とすると

$\overrightarrow{OP}=s'(-\overrightarrow{OA})+t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$，$0\leqq s'\leqq 1$，$0\leqq t'\leqq 1$

よって，点Pの存在範囲は

$-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とすると，線分ODとOEを隣り合う2辺とする平行四辺形の周と内部。

(2) $(s-t)\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}=s(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

であるから

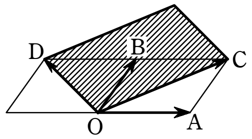
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$

とすると

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

ゆえに，点 P の存在範囲は

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$ とすると，線分 OC，OD を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部。



5．平面上に 4 点 O，A，B，C があり，点 C は線分 OB 上にある。$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$ であり，内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の値は 1 である。また，$\angle ACB=135^\circ$ である。

(1) $\angle AOB=$ ア$\boxed{}$ である。また，$|\overrightarrow{CA}|=$ イ$\boxed{}$，$|\overrightarrow{CB}|=$ ウ$\boxed{}$ である。

(2) 点 P は $\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$ $(l\geqq 0,\ m\geqq 0,\ n\geqq 0,\ l+m+n=2)$ を満たしながら動く。このとき，点 P の存在範囲 D の面積は エ$\boxed{}$ である。

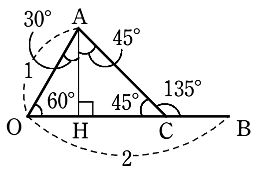
解答 (ア) 60°　(イ) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(ウ) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$　(エ) $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$

解説

(1) $\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\angle AOB\leqq 180^\circ$ であるから　$\angle AOB=$ ア60°

点 A から直線 OB に垂線を引き，直線 OB との交点を H とすると　$AH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$\angle ACH=180^\circ-\angle ACB=45^\circ$ であるから

$AC=\sqrt{2}\,AH=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

よって　$|\overrightarrow{CA}|=$ イ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$OC=OH+HC$ であるから

$OC=\dfrac{1}{2}+AH=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{CB}|=OB-OC=$ ウ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

(2) $l+m+n=2$ から　$l=2-(m+n)$

よって　$\overrightarrow{OP}=\{2-(m+n)\}\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$

$=2\overrightarrow{OA}+m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+n(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=2\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$

また，$m\geqq 0$，$n\geqq 0$，$l=2-(m+n)\geqq 0$ であるから　$0\leqq m+n\leqq 2$

ゆえに　$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{2}(2\overrightarrow{AB})+\dfrac{n}{2}(2\overrightarrow{AC})$，$0\leqq\dfrac{m}{2}+\dfrac{n}{2}\leqq 1$，$\dfrac{m}{2}\geqq 0$，$\dfrac{n}{2}\geqq 0$

よって，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$，$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$ とすると，点 P の存在範囲 D は $\triangle A'B'C'$ の周と内部である。

$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ で，相似比が $1:2$ であるから，面積比は $1:4$ である。

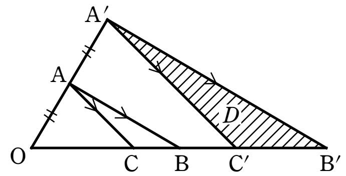
ゆえに，求める面積を S とすると

$S=4\times\triangle ABC$

$=4\times\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\sin 135^\circ$

$=2\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=$ エ $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$



6．平面上に $\triangle ABC$ がある。実数 a，b，c は条件

(a)　$a<0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c\neq 0$

を満たし，点 P は $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。また，辺 BC を $c:b$ に内分する点を D とする。

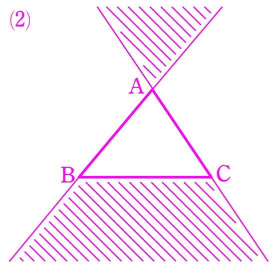
(1) $\overrightarrow{AD}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2) a，b，c が条件 (a) を満たしながら動くとき，P の存在範囲を図示せよ。

解答 (1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$

(2) [図] 境界線を含まない

(2)



解説

(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{c+b}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$

(2) 等式から　$-a\overrightarrow{AP}+b(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+c(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

変形して　$(a+b+c)\overrightarrow{AP}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$

また，条件 (a) から　$a+b+c\neq 0$

よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

ゆえに，(1) から　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD}$

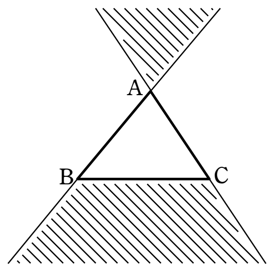
[1] $a+b+c>0$ のとき，条件 (a) より $a<0$ であるから

$b+c>a+b+c>0$　よって　$\dfrac{b+c}{a+b+c}>1$

[2] $a+b+c<0$ のとき，条件 (a) より $b+c>0$ であるから　$\dfrac{b+c}{a+b+c}<0$

ゆえに，点 D は線分 BC（B，C を除く）上の任意の点であり [1]，[2] から，点 P は線分 AD の外分点（端点を除く）全体を動く。

よって，図の斜線部分。ただし，境界線を含まない。



7．平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ を満たし，ベクトル $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ が表す点を $P(\vec{p})$ とするとき

(1) s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$0\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 P が描く図形の面積を求めよ。

(2) s，t が $0\leqq s\leqq 3$，$1\leqq t\leqq 2$ を満たすとき，点 P が描く図形の面積を求めよ。

解答 (1) $2\sqrt{2}$　(2) $12\sqrt{2}$

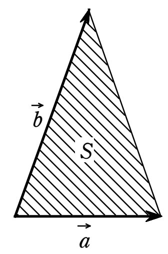
解説

(1) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$0\leqq s+t\leqq 1$ のとき，点 P が描く図形は右の図の三角形の周および内部であるから，求める面積を S とすると

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2\times 3^2-2^2}$

$=2\sqrt{2}$



(2) $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{OA'}=s\vec{a}$ とすると

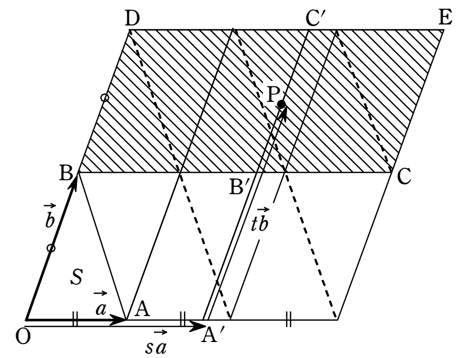
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{OB}$

ここで，t を $1\leqq t\leqq 2$ の範囲で変化させると，点 P は図の線分 B′C′ 上を動く。

ただし，$\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB}$，

$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+2\overrightarrow{OB}$

次に，s を $0\leqq s\leqq 3$ の範囲で変化させると，線分 B′C′ は図の線分 BD から線分 CE まで平行に動く。



ただし，$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OE}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

よって，点 P が描く図形は図の斜線部分である。

ただし，境界線は含む。

この部分は平行四辺形で，その面積は (1) で求めた面積 S の 6 倍であるから，

求める面積は　$6S=6\times 2\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

8．平面上で原点 O と 3 点 A$(3,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，C$(-1,\ 1)$ を考える。実数 s，t に対し，点 P を $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ により定める。

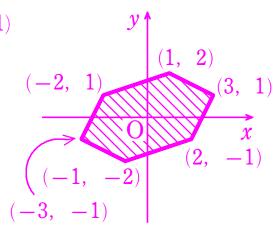
(1) s，t が条件 $-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 P$(x,\ y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。

(2) 点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき，内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}$ の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ。

解答 (1) [図] 境界線を含む

(2) P$(-2,\ 1)$ のとき最大値 3

(1)



解説

(1) まず，$-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$ を満たすとき，点 P の存在する範囲を調べる。

s を固定して，$\overrightarrow{OA'}=s\overrightarrow{OA}$ とすると　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{OB}$

よって，$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で t を動かすとき，$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB}$ とすると，点 P は線分 P_1P_2 上を動く。

そして，s を $-1\leqq s\leqq 1$ の範囲で動かすと，線分 P_1P_2 は図 1 の線分 GH から EF まで平行に動く。

ただし　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

ゆえに，$-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$ のとき，点 P の動く領域 D_1 は平行四辺形 EFHG の周と内部である。

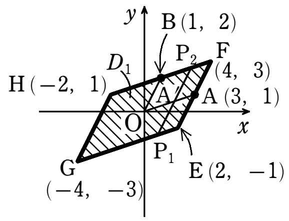


図 1

次に，$-1\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 P の存在する範囲を調べる。

$s+t=k$ $(-1\leqq k\leqq 1)$ とおくと，$k\fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s_1=\frac{s}{k}$，

$t_1=\frac{t}{k}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s_1\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+t_1\overrightarrow{\mathrm{OB_1}},\quad s_1+t_1=1$$

ゆえに，点 P は直線 $\mathrm{A_1B_1}$ 上を動く。

また，$k=0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となり，点 P は O を通り，直線 AB に平行な直線上を動く。

k を $-1\leqq k\leqq 1$ の範囲で動かすと，直線 $\mathrm{A_1B_1}$ は図 2 の直線 AB と IJ に挟まれた部分を動く。(直線 AB 上，IJ 上をともに含む。)

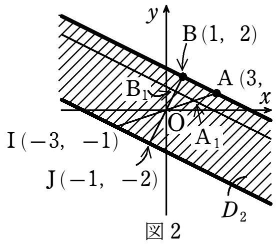


図 2

ただし　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

すなわち，$-1\leqq s+t\leqq 1$ のとき，点 P の動く領域 D_2 は図 2 の斜線部分 (境界線を含む) である。

以上から，求める範囲 D は領域 D_1 と D_2 の共通部分，すなわち図 3 の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

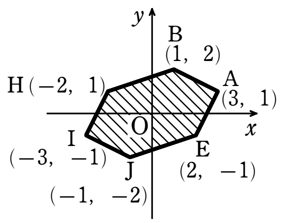


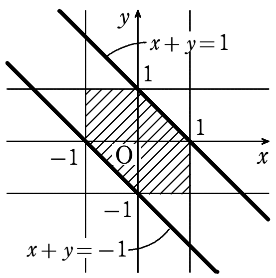
図 3

別解 1. $-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ を満たす点 P$(s,\ t)$ は，直交座標平面上において，

領域 K：$-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$，$-1\leqq x+y\leqq 1$

上にある。

領域 K を図示すると，右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。



ここで，斜交座標平面上の点 (1, 0)，(0, 1) に対し，直交座標平面上の点 (3, 1)，(1, 2) をそれぞれ対応させる。

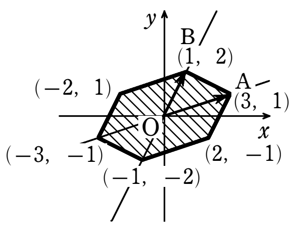
斜交座標平面上の 4 点 (−1, 1)，(−1, 0)，(0, −1)，(1, −1) に対し，直交座標平面における座標はそれぞれ

(−3+1, −1+2)，(−3, −1)，

(−1, −2)，(3−1, 1−2)

すなわち，(−2, 1)，(−3, −1)，(−1, −2)，(2, −1) である。

よって，求める範囲 D は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



別解 2. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から

$(x,\ y)=s(3,\ 1)+t(1,\ 2)$

よって　$x=3s+t$，$y=s+2t$　　ゆえに　$s=\frac{2x-y}{5}$，$t=\frac{-x+3y}{5}$

$-1\leqq s\leqq 1$ から　$-1\leqq\frac{2x-y}{5}\leqq 1$

よって　$2x-5\leqq y\leqq 2x+5$　……[A]

$-1\leqq t\leqq 1$ から　$-1\leqq\frac{-x+3y}{5}\leqq 1$

ゆえに　$\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}\leqq y\leqq\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$　……[B]

また，$s+t=\frac{x+2y}{5}$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ から　$-1\leqq\frac{x+2y}{5}\leqq 1$

よって　$-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\leqq y\leqq -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$　……[C]

不等式[A]，[B]，[C] それぞれの表す領域の共通部分を求めると，D は図 3 の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\times(-1)+y\times 1=-x+y$

$-x+y=l$ とすると　$y=x+l$　……①

直線 ① の傾きは 1 であり，(1) の図 3 において，直線 IH の傾きは 2，直線 HB の傾きは $\frac{1}{3}$ である。

よって，直線 ① が点 H(−2, 1) を通るとき，l は最大となる。

ゆえに，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は，P(−2, 1) のとき最大値 −(−2)+1=3 をとる。

9．1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

解答　$\frac{\sqrt{3}}{9}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とする。

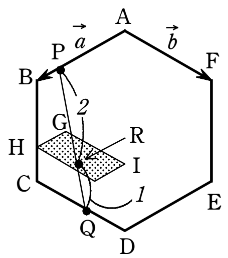
点 P は辺 AB 上を動くから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{a}$ $(0\leqq s\leqq 1)$ と表される。

点 Q は辺 CD 上を動くから，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　すなわち $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\vec{b}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\vec{b}$

点 R は線分 PQ を 2 : 1 に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\times\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{2+1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{s}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}$$



ここで，G を $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす点とし，H，I を

$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{\vec{a}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\frac{2}{3}\vec{b}$ を満たす点とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}+s\overrightarrow{\mathrm{GH}}+t\overrightarrow{\mathrm{GI}}$

$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ であるから，点 R が通りうる範囲は，線分 GH，GI を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周および内部である。

$\angle\mathrm{IGH}=\angle\mathrm{FAB}=120^\circ$ であるから，求める面積は

$$2\times\frac{1}{2}\mathrm{GH}\times\mathrm{GI}\sin 120^\circ=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$