数学演習（ベクトル方程式）Ｒ１．１１．２５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1．(1)　3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC がある。辺 AB を 2 : 3 に内分する点 M を通り，辺 AC に平行な直線のベクトル方程式を求めよ。

(2)　(ア)　2 点 $(-3,\ 2)$，$(2,\ -4)$ を通る直線の方程式を媒介変数 t を用いて表せ。

(イ)　(ア) で求めた直線の方程式を，t を消去した形で表せ。

2．(1)　点 A$(-2,\ 1)$ を通り，直線 $3x-5y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

(2)　2 直線 $x-3y+5=0$，$2x+4y+3=0$ のなす鋭角を求めよ。

3．点 A$(4,\ 5)$ から直線 $\ell : x+2y-6=0$ に垂線を引き，ℓ との交点を H とする。

(1)　点 H の座標を，ベクトルを用いて求めよ。

(2)　線分 AH の長さを求めよ。

4．平行四辺形 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき

(1)　線分 CM と FE の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

(2)　直線 AP と対角線 BD の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

5．平面上の $\triangle$OAB と任意の点 P に対し，次のベクトル方程式は円を表す。どのような円か。

(1) $\left|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}-5\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=5$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

6．座標平面において，$\triangle$ABC は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ を満たしている。この平面上の点 P が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ を満たすとき，P はどのような図形上の点であるか。

7．$\triangle$ABC において，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ とする。次の直線のベクトル方程式を求めよ。

(1) 辺 AB の中点と辺 AC の中点を通る直線

(2) 辺 BC の垂直二等分線

数学演習（ベクトル方程式）Ｒ１．１１．２５

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．(1)　3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC がある。辺 AB を 2 : 3 に内分する点 M を通り，辺 AC に平行な直線のベクトル方程式を求めよ。

(2)　(ア)　2 点 $(-3,\ 2)$，$(2,\ -4)$ を通る直線の方程式を媒介変数 t を用いて表せ。

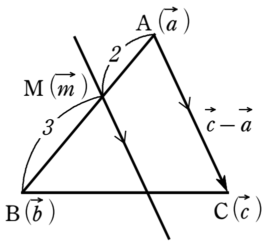
(イ)　(ア) で求めた直線の方程式を，t を消去した形で表せ。

解答　t は媒介変数とする。　(1)　$\vec{p}=\left(\dfrac{3}{5}-t\right)\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}+t\vec{c}$

(2)　(ア)　$\begin{cases}x=5t-3\\ y=-6t+2\end{cases}$　　(イ)　$6x+5y+8=0$

解説

(1)　直線上の任意の点を P$(\vec{p})$ とし，t を媒介変数とする。



M$(\vec{m})$ とすると　　$\vec{m}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$

辺 AC に平行な直線の方向ベクトルは $\overrightarrow{AC}$ であるから

$$\vec{p}=\vec{m}+t\overrightarrow{AC}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}+t(\vec{c}-\vec{a})$$

整理して　$\vec{p}=\left(\dfrac{3}{5}-t\right)\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}+t\vec{c}$　(t は媒介変数)

(2)　(ア)　2 点 $(-3,\ 2)$，$(2,\ -4)$ を通る直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$(x,\ y)=(1-t)(-3,\ 2)+t(2,\ -4)=(-3(1-t)+2t,\ 2(1-t)-4t)$

$=(5t-3,\ -6t+2)$

よって　$\begin{cases}x=5t-3\\ y=-6t+2\end{cases}$　(t は媒介変数)

(イ)　$x=5t-3$ ……①，$y=-6t+2$ ……② とする。

①×6＋②×5 から　　$6x+5y+8=0$

2．(1)　点 A$(-2,\ 1)$ を通り，直線 $3x-5y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

(2)　2 直線 $x-3y+5=0$，$2x+4y+3=0$ のなす鋭角を求めよ。

解答　(1)　順に　$3x-5y+11=0$，　$5x+3y+7=0$　　(2)　45°

解説

(1)　$3x-5y+4=0$ ……① とする。

$\vec{n}=(3,\ -5)$ とすると，$\vec{n}$ は直線 ① の法線ベクトルであり，直線 ① の方向ベクトルを $\vec{m}=(a,\ b)$ とすると　　$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$　　よって　　$3a-5b=0$

ゆえに　　$b=\dfrac{3}{5}a$　　よって　　$\vec{m}=\left(a,\ \dfrac{3}{5}a\right)=\dfrac{a}{5}(5,\ 3)$

ゆえに，$\vec{m}=(5,\ 3)$ ととることができる。

直線 ① に平行な直線の法線ベクトルは $\vec{n}$ であるから，点 A$(-2,\ 1)$ を通り，直線 ① に平行な直線上の点を P$(x,\ y)$ とすると　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$\overrightarrow{AP}=(x+2,\ y-1)$ であるから

$3(x+2)-5(y-1)=0$　　すなわち　　$3x-5y+11=0$

また，直線 ① に垂直な直線の法線ベクトルは $\vec{m}$ であるから，点 A$(-2,\ 1)$ を通り，直線 ① に垂直な直線上の点を Q$(x,\ y)$ とすると　　$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$

$\overrightarrow{AQ}=(x+2,\ y-1)$ であるから

$5(x+2)+3(y-1)=0$　　すなわち　　$5x+3y+7=0$

(2)　2 直線 $x-3y+5=0$，$2x+4y+3=0$ をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とすると，ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルはそれぞれ $\overrightarrow{n_1}=(1,\ -3)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,\ 4)$ とおける。

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1\times2-3\times4=-10$，$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$，

$|\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$

であるから，$\overrightarrow{n_1}$ と $\overrightarrow{n_2}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=135°$

したがって，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 のなす鋭角は　　$180°-135°=45°$

3．点 A$(4,\ 5)$ から直線 $\ell : x+2y-6=0$ に垂線を引き，ℓ との交点を H とする。

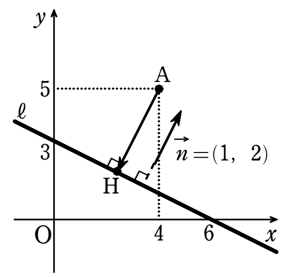
(1)　点 H の座標を，ベクトルを用いて求めよ。

(2)　線分 AH の長さを求めよ。

解答　(1)　H$\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$　　(2)　$\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

解説

(1)　$\vec{n}=(1,\ 2)$ とすると，$\vec{n}$ は直線 ℓ の法線ベクトルであるから　　$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{AH}$



よって，$\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$ (k は実数) とおけるから，H$(s,\ t)$ とすると　　$(s-4,\ t-5)=k(1,\ 2)$

ゆえに　　$s-4=k$ ……①，$t-5=2k$ ……②

また，$s+2t-6=0$ であるから，①，② より

$4+k+2(5+2k)-6=0$　　したがって　　$k=-\dfrac{8}{5}$

よって，①，② から　　$s=\dfrac{12}{5}$，$t=\dfrac{9}{5}$

したがって　　H$\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

別解　H$(6-2t,\ t)$，$\vec{n}=(1,\ 2)$ とすると，$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{AH}$ であるから

$1\cdot(t-5)-2(2-2t)=0$　　よって　　$t=\dfrac{9}{5}$

ゆえに　　H$\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

(2)　$\overrightarrow{AH}=-\dfrac{8}{5}\vec{n}$ から　　$AH=|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{8}{5}\sqrt{1^2+2^2}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

4．平行四辺形 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき

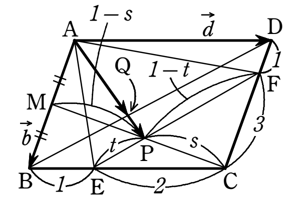
(1)　線分 CM と FE の交点を P とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

(2)　直線 AP と対角線 BD の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

解答　(1)　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{10}{13}\vec{b}+\dfrac{7}{13}\vec{d}$　　(2)　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{10}{17}\vec{b}+\dfrac{7}{17}\vec{d}$

解説

(1)　CP : PM $=s:(1-s)$，EP : PF $=t:(1-t)$ とすると



$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AM}=(1-s)(\vec{b}+\vec{d})+\dfrac{s}{2}\vec{b}$

$=\left(1-\dfrac{s}{2}\right)\vec{b}+(1-s)\vec{d}$

$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{AF}$

$=(1-t)\left(\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{d}\right)+t\left(\vec{d}+\dfrac{1}{4}\vec{b}\right)$

$=\left(1-\dfrac{3}{4}t\right)\vec{b}+\dfrac{1+2t}{3}\vec{d}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{d}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\not\parallel\vec{d}$ であるから　　$1-\dfrac{s}{2}=1-\dfrac{3}{4}t$，$1-s=\dfrac{1+2t}{3}$

よって　　$s=\dfrac{6}{13}$，$t=\dfrac{4}{13}$　　ゆえに　　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{10}{13}\vec{b}+\dfrac{7}{13}\vec{d}$

(2)　点 Q は直線 AP 上にあるから，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ (k は実数) とおける。

よって　　$\overrightarrow{AQ}=k\left(\dfrac{10}{13}\vec{b}+\dfrac{7}{13}\vec{d}\right)=\dfrac{10}{13}k\vec{b}+\dfrac{7}{13}k\vec{d}$

点 Q は直線 BD 上にあるから　　$\dfrac{10}{13}k+\dfrac{7}{13}k=1$　　ゆえに　　$k=\dfrac{13}{17}$

したがって　　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{10}{17}\vec{b}+\dfrac{7}{17}\vec{d}$

5．平面上の △OAB と任意の点 P に対し，次のベクトル方程式は円を表す。どのような円か。

(1)　$|3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-5\overrightarrow{OP}|=5$　　(2)　$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

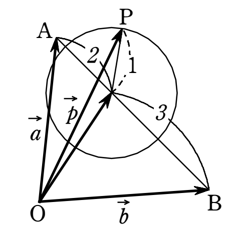
解答　(1)　辺 AB を 2 : 3 に内分する点を中心とし，半径 1 の円

(2)　点 O に関して点 A と対称な点と点 B を直径の両端とする円

解説

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とする。

(1)　$|3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-5\overrightarrow{OP}|=\left|-5\left(\vec{p}-\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\right)\right|$



であるから，ベクトル方程式は

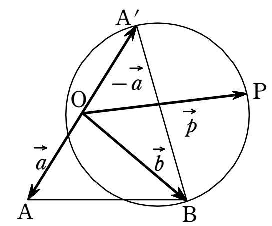
$5\left|\vec{p}-\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\right|=5$

すなわち　　$\left|\vec{p}-\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}\right|=1$

よって，辺 AB を 2 : 3 に内分する点を中心とし，半径 1 の円。

(2)　ベクトル方程式は

$\vec{p}\cdot\{\vec{p}-(\vec{b}-\vec{a})\}=\vec{a}\cdot\vec{b}$



よって　　$|\vec{p}|^2+(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　　$(\vec{p}+\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

すなわち　$\{\vec{p}-(-\vec{a})\}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

よって，点 O に関して点 A と対称な点と点 B を直径の両端とする円。

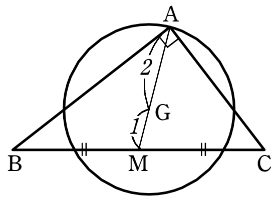
6．座標平面において，△ABC は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ を満たしている。この平面上の点 P が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ を満たすとき，P はどのような図形上の点であるか。

解答　点 P は △ABC の重心 G を中心とし，半径が AG の円周上の点

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$ とすると，条件式は

$$\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{c})+(\vec{p}-\vec{c})\cdot\vec{p}=0 \quad\cdots\cdots①$$



$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ より $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ であるから，① を整理して

$$3|\vec{p}|^2-2(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}=0$$

よって　$|\vec{p}|^2-\dfrac{2}{3}(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}=0$

ゆえに　$|\vec{p}|^2-\dfrac{2}{3}(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\dfrac{1}{9}|\vec{b}+\vec{c}|^2=\dfrac{1}{9}|\vec{b}+\vec{c}|^2$

よって　$\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\right|^2=\left|\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\right|^2$

ゆえに　$\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\right|=\left|\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\right|$

辺 BC の中点を M とすると　$\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ とすると，点 G は △ABC の重心となる。

したがって，点 P は △ABC の重心 G を中心とし，半径が AG の円周上の点である。

7．△ABC において，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ とする。次の直線のベクトル方程式を求めよ。

(1)　辺 AB の中点と辺 AC の中点を通る直線　　(2)　辺 BC の垂直二等分線

解答　求める直線上の任意の点を P$(\vec{p})$ とする。

(1)　$\vec{p}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{b}+t\vec{c}$（$t$ は媒介変数）　(2)　$2\vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2$

解説

求める直線上の任意の点を P$(\vec{p})$ とする。

(1)　辺 AB，AC の中点を通る直線は $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に平行であるから，辺 AB の中点を D$(\vec{d})$ とすると，求めるベクトル方程式は

$$\vec{p}=\vec{d}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad すなわち \quad \vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+t(\vec{c}-\vec{b})$$

よって　$\vec{p}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{b}+t\vec{c}$（$t$ は媒介変数）

(2)　辺 BC の中点を E$(\vec{e})$ とすると，BC の垂直二等分線は点 E を通り $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に垂直であるから，求めるベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\vec{p}-\vec{e})=0 \quad すなわち \quad (\vec{c}-\vec{b})\cdot\left(\vec{p}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)=0$$

ゆえに　$(\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{p}-\dfrac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0$

よって　$2\vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2$