数学演習（ベクトルの図形への応用）Ｒ１．１１．２４　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX，OY ($\angle$XOY$<180^\circ$) 上にそれぞれ O と異なる 2 点 A，B をとる。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。点 C が $\angle$XOY の二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を実数 t ($t\geqq 0$) と $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) $\angle$XOY の二等分線と $\angle$XAB の二等分線の交点を P とする。OA$=2$，OB$=3$，AB$=4$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

2．$\triangle$OAB において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$ とする。点 A で直線 OA に接する円の中心 C が $\angle$AOB の二等分線 g 上にある。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ で表せ。

3．$\triangle$ABC において，AB$=4$，AC$=5$，BC$=6$ とし，外心を O とする。$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

4．△ABC の重心を G とするとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$　　(2) $AB^2+AC^2=BG^2+CG^2+4AG^2$

5．△ABC の重心を G，外接円の中心を O とするとき，次のことを示せ。

(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ である点 H をとると，H は △ABC の垂心である。

(2) (1) の点 H に対して，3 点 O，G，H は一直線上にあり　$GH=2OG$

6．鋭角三角形 ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q，R とするとき，$\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ が成立しているとする。

(1) $5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ を求めよ。　　(3) ∠A の大きさを求めよ。

7．△ABC が次の等式を満たすとき，△ABC はどのような形か。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$

8．△ABC があり，AB＝3，BC＝7，CA＝5 を満たしている。△ABC の内心を I，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　△ABC の面積を求めよ。

(3)　辺 AB 上に点 P，辺 AC 上に点 Q を，3 点 P，I，Q が一直線上にあるようにとるとき，△APQ の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

9．平面上の点 A，B，C，P が $3\overrightarrow{PA}+k\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。ただし，$k>0$ で，点 A，B，C は同一直線上にないものとする。

(1)　$\overrightarrow{AP}$ を k，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2)　点 P が △ABC の辺を含む内部にあることを示せ。

(3)　△PAB と △PAC の面積が等しいとき，△PAB と △PBC の面積の比を求めよ。

1． 平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX，OY（∠XOY＜180°）上にそれぞれ O と異なる 2 点 A，B をとる。

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とする。点 C が ∠XOY の二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{OC}$ を実数 t ($t\geqq 0$) と $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

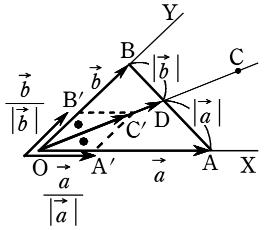
(2)　∠XOY の二等分線と ∠XAB の二等分線の交点を P とする。OA＝2，OB＝3，AB＝4 のとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

解答　(1)　$\overrightarrow{OC}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$　　(2)　$\overrightarrow{OP}=3\vec{a}+2\vec{b}$

解説

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$ とすると

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\quad \overrightarrow{OB'}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$



$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OC'}$ とすると，四角形 OA′C′B′ はひし形となる。

点 C は，∠XOY すなわち ∠A′OB′ の二等分線上にあるから，半直線 OC′ 上の点である。

よって，実数 t ($t\geqq 0$) に対し　$\overrightarrow{OC}=t\,\overrightarrow{OC'}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

別解　∠XOY の二等分線と線分 AB との交点 D に対し，AD：DB＝$|\vec{a}|:|\vec{b}|$ から

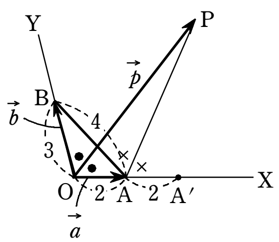
$$\overrightarrow{OD}=\frac{|\vec{b}|\overrightarrow{OA}+|\vec{a}|\overrightarrow{OB}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

点 C は半直線 OD 上にあるから　$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OD}$ ($k\geqq 0$)

そこで $\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}k=t$ とおくと，$t\geqq 0$ で　$\overrightarrow{OC}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

(2)　点 P は ∠XOY の二等分線上にあるから，(1) より

$$\overrightarrow{OP}=t\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{3}\right),\quad t\geqq 0$$



$\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$ である点 A′ をとると，点 P は ∠XAB の二等分線上にあり，$\overrightarrow{AP}=s\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AA'}}{|\overrightarrow{AA'}|}\right)$ ($s\geqq 0$) であるから

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+s\left(\frac{\vec{b}-\vec{a}}{4}+\frac{\vec{a}}{2}\right)$$

$$=\left(1+\frac{s}{4}\right)\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\dfrac{t}{2}=1+\dfrac{s}{4}$，$\dfrac{t}{3}=\dfrac{s}{4}$

これを解いて　$s=8$，$t=6$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=3\vec{a}+2\vec{b}$

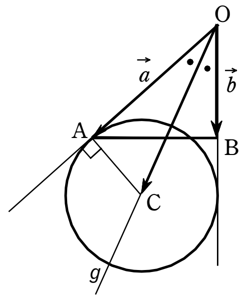
2． △OAB において，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$ とする。点 A で直線 OA に接する円の中心 C が ∠AOB の二等分線 g 上にある。$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{10}\vec{b}$

解説

点 C は ∠AOB の二等分線上にあるから

$$\overrightarrow{OC}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=t\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{2}\right),\quad t\geqq 0$$



と表される。

また，中心 C の円が点 A で直線 OA に接するから

CA⊥OA

よって　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ …… ①

ここで　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}$

$$=\left\{\left(1-\frac{t}{3}\right)\vec{a}-\frac{t}{2}\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}$$

$$=\left(1-\frac{t}{3}\right)|\vec{a}|^2-\frac{t}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(1-\frac{t}{3}\right)\times 3^2-\frac{t}{2}\times 4$$

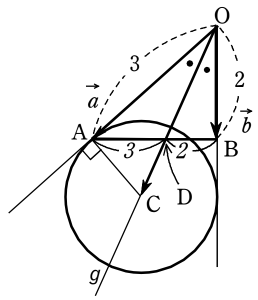
$$=9-5t$$

① から　$9-5t=0$　　ゆえに　$t=\dfrac{9}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{9}{5}\left(\dfrac{\vec{a}}{3}+\dfrac{\vec{b}}{2}\right)=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{10}\vec{b}$

別解　直線 OC と辺 AB の交点を D とすると

AD：DB＝OA：OB＝3：2



よって　$\overrightarrow{OD}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$

$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OD}$ ($k\geqq 0$) と表されるから，$\dfrac{k}{5}=t$ とおくと

$\overrightarrow{OC}=t(2\vec{a}+3\vec{b})$，$t\geqq 0$

と表される。

また，中心 C の円が点 A で直線 OA に接するから

CA⊥OA

よって　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　…… ①

ここで　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}=\{(1-2t)\vec{a}-3t\vec{b}\}\cdot\vec{a}$

$$=(1-2t)|\vec{a}|^2-3t\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=(1-2t)\times 3^2-3t\times 4=9-30t$$

① から　$9-30t=0$　　ゆえに　$t=\dfrac{3}{10}$

したがって　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{10}\vec{b}$

3． △ABC において，AB＝4，AC＝5，BC＝6 とし，外心を O とする。$\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{AO}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{16}{35}\overrightarrow{AC}$

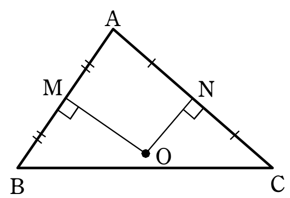
解説

辺 AB，辺 AC の中点をそれぞれ M，N とする。

ただし，△ABC は直角三角形ではないから，2 点 M，N はともに点 O とは一致しない。

点 O は △ABC の外心であるから

AB⊥MO，AC⊥NO



ゆえに　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MO}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NO}=0$

$\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$（$s$，$t$ は実数）とすると，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MO}=0$ から

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM})=0$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\left\{\left(s-\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right\}=0$　…… ①

また，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NO}=0$ から

$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AN})=0$

ゆえに　$\overrightarrow{AC}\cdot\left\{s\overrightarrow{AB}+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}\right\}=0$　…… ②

ここで　$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2$

よって　$6^2=5^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4^2$

ゆえに　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}$

よって，① から　$\left(s-\dfrac{1}{2}\right)\times 4^2+t\times\dfrac{5}{2}=0$

すなわち　$32s+5t=16$　…… ③

また，② から　$s\times\dfrac{5}{2}+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\times 5^2=0$

すなわち　$s+10t=5$　…… ④

③，④ から　$s=\dfrac{3}{7}$，$t=\dfrac{16}{35}$

したがって　$\overrightarrow{AO}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{16}{35}\overrightarrow{AC}$

4．△ABC の重心を G とするとき，次の等式を証明せよ。

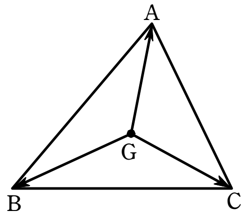
(1)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$　　(2)　$AB^2+AC^2=BG^2+CG^2+4AG^2$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　重心 G の位置ベクトルを，点 O に関する位置ベクトルで表すと $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ であるから，点 G に関する位置ベクトルで表すと

$$\overrightarrow{GG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$



ゆえに　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

別解　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG})$
$+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG})$
$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$

(2)　$\overrightarrow{GA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{GB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{GC}=\vec{c}$ とすると，(1) の結果から　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

ゆえに　$\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$　　また　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}=-2\vec{a}-\vec{b}$

よって　$AB^2+AC^2-(BG^2+CG^2+4AG^2)$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-(|\overrightarrow{BG}|^2+|\overrightarrow{CG}|^2+4|\overrightarrow{AG}|^2)$

$=|\vec{b}-\vec{a}|^2+|-2\vec{a}-\vec{b}|^2-|-\vec{b}|^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2-4|-\vec{a}|^2$

$=(|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2)+(4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$-|\vec{b}|^2-(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)-4|\vec{a}|^2=0$

ゆえに　$AB^2+AC^2=BG^2+CG^2+4AG^2$

5．△ABC の重心を G，外接円の中心を O とするとき，次のことを示せ。

(1)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ である点 H をとると，H は △ABC の垂心である。

(2)　(1) の点 H に対して，3 点 O，G，H は一直線上にあり　GH＝2OG

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

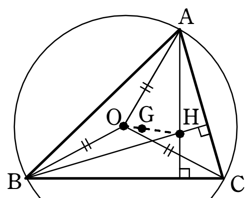
(1)　$\angle A\neq90°$，$\angle B\neq90°$ としてよい。

このとき，外心 O は辺 BC，CA 上にはない。……①

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ から

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

ゆえに　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$
$=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$



同様にして

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})$
$=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2=0$

また，① から　$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\neq\vec{0}$

よって，$\overrightarrow{AH}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BH}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{CA}\neq\vec{0}$ であるから

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$　すなわち　$AH\perp BC$，$BH\perp CA$

したがって，点 H は △ABC の垂心である。

(2)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OH}$ から　　$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

ゆえに　$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OG}$

よって，3 点 O，G，H は一直線上にあり　GH＝2OG

6．鋭角三角形 ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q，R とするとき，$\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ が成立しているとする。

(1)　$5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

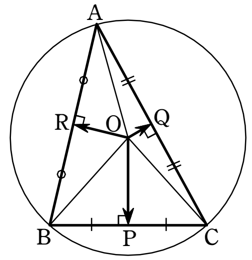
(2)　内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ を求めよ。　　(3)　∠A の大きさを求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　0　　(3)　45°

解説

(1)　3 点 P，Q，R は，それぞれ辺 BC，CA，AB の中点であるから

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2}$，$\overrightarrow{OR}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$



これらを $\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ に代入して

$$\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+2\left(\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2}\right)+3\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right)=\vec{0}$$

ゆえに　$5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

(2)　(1) の結果から　　$5\overrightarrow{OA}=-(4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC})$

よって　$5|\overrightarrow{OA}|=|4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}|$

両辺を 2 乗して　　$25|\overrightarrow{OA}|^2=16|\overrightarrow{OB}|^2+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+9|\overrightarrow{OC}|^2$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ であるから　　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

(3)　(2) から　　$\angle BOC=90°$

∠A と ∠BOC は弧 BC に対する円周角と中心角の関係にあり，△ABC は鋭角三角形であるから，弦 BC から見て点 A と点 O は同じ側にある。

よって　　$\angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\dfrac{1}{2}\times90°=45°$

7．△ABC が次の等式を満たすとき，△ABC はどのような形か。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$

解答　(1)　∠C＝90° の直角三角形　　(2)　正三角形

解説

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$ から　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ゆえに　　$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ であるから　　$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{CB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ であるから　　$\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{AC}$

すなわち　$CB\perp AC$

したがって，△ABC は ∠C＝90° の直角三角形である。

(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$ から　　$\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})=0$

よって　　$(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$

ゆえに　　$|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0$

よって　　$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$　すなわち　AC＝AB　……①

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ から，上と同様にして　　BC＝AB　……②

①，② から　　AB＝BC＝CA

したがって，△ABC は正三角形である。

8．△ABC があり，AB＝3，BC＝7，CA＝5 を満たしている。△ABC の内心を I，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　△ABC の面積を求めよ。

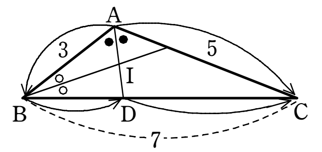
(3)　辺 AB 上に点 P，辺 AC 上に点 Q を，3 点 P，I，Q が一直線上にあるようにとるとき，△APQ の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$　　(2)　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　　(3)　$\sqrt{3}\leqq S\leqq\dfrac{25\sqrt{3}}{16}$

解説

(1)　直線 AI と辺 BC の交点を D とすると

BD : DC＝AB : AC＝3 : 5



よって　　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+5}=\dfrac{1}{8}(5\vec{b}+3\vec{c})$

また　　$BD=\dfrac{3}{8}BC=\dfrac{3}{8}\times7=\dfrac{21}{8}$

△ABD において　　$AI:ID=BA:BD=3:\dfrac{21}{8}=8:7$

ゆえに　　$\overrightarrow{AI}=\dfrac{8}{15}\overrightarrow{AD}=\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{1}{8}(5\vec{b}+3\vec{c})=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$　……①

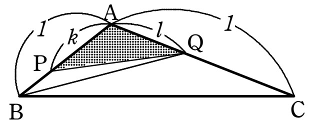
(2)　△ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle BAC=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$$

$0°<\angle BAC<180°$ であるから　　$\angle BAC=120°$

よって　　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

(3)　$\overrightarrow{AP}=k\vec{b}$，$\overrightarrow{AQ}=l\vec{c}$　$(0<k\leqq1,\ 0<l\leqq1)$ とすると，△APQ の面積 S は



$S=kl\triangle ABC=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}kl$

PI : IQ＝$t:(1-t)$　$(0<t<1)$ とすると

$\overrightarrow{AI}=(1-t)\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AQ}=(1-t)k\vec{b}+tl\vec{c}$　……②

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\nparallel\vec{c}$ であるから，①，② より　　$(1-t)k=\dfrac{1}{3}$，　$tl=\dfrac{1}{5}$

$0<t<1$ であるから　　$k=\dfrac{1}{3(1-t)}$　……③，$l=\dfrac{1}{5t}$　……④

ゆえに　　$S=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{3(1-t)}\cdot\dfrac{1}{5t}=\dfrac{\sqrt{3}}{4t(1-t)}$　すなわち　$\dfrac{\sqrt{3}}{S}=4t(1-t)$

ここで，$0<k\leqq1$ と ③ から　　$1-t\geqq\dfrac{1}{3}$　　よって　　$t\leqq\dfrac{2}{3}$

$0<l\leqq1$ と ④ から　　$t\geqq\dfrac{1}{5}$

ゆえに，t のとりうる値の範囲は　　$\dfrac{1}{5}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}$

$4t(1-t)=-4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$ であるから，$\dfrac{1}{5}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}$ の範囲で $4t(1-t)$ は

$t=\dfrac{1}{5}$ のとき最小値 $4\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{25}$，　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 1

をとる。

したがって，$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4t(1-t)}$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{\sqrt{3}}{1}\leqq S\leqq\frac{\sqrt{3}}{\frac{16}{25}}\quad すなわち\quad \sqrt{3}\leqq S\leqq\frac{25\sqrt{3}}{16}$$

9．平面上の点 A，B，C，P が $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+k\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。ただし，$k>0$ で，点 A，B，C は同一直線上にないものとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を k，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2)　点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の辺を含む内部にあることを示せ。

(3)　$\triangle\mathrm{PAB}$ と $\triangle\mathrm{PAC}$ の面積が等しいとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ と $\triangle\mathrm{PBC}$ の面積の比を求めよ。

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{k}{k+4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{k+4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(2)　略　　(3)　$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBC}=1:3$

解説

(1)　$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+k\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を変形すると

$$-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+k(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$$

よって　$(k+4)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

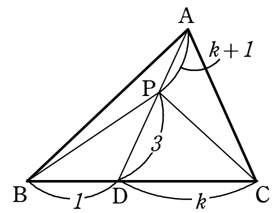
$k>0$ より，$k+4>0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{k}{k+4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{k+4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{k+1}{k+4}\cdot\dfrac{k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1+k}$

$k>0$ であるから，辺 BC を $1:k$ に内分する点を D とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{k+1}{k+4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

ゆえに，P は線分 AD を $(k+1):3$ に内分する点である。…… ①



したがって，点 P は $\triangle\mathrm{ABC}$ の辺を含む内部にある。

(3)　① から　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{k+1}{k+4}\triangle\mathrm{DAB}$，$\triangle\mathrm{PAC}=\dfrac{k+1}{k+4}\triangle\mathrm{DAC}$

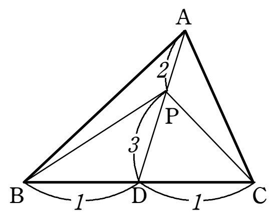
よって，$\triangle\mathrm{PAB}=\triangle\mathrm{PAC}$ のとき

$$\triangle\mathrm{DAB}=\triangle\mathrm{DAC}$$

ゆえに　$\mathrm{BD}=\mathrm{DC}$　　よって　$k=1$

このとき　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{2}{5}\triangle\mathrm{DAB}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$

$$=\frac{1}{5}\triangle\mathrm{ABC}$$



また　$\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{1}{5}\triangle\mathrm{ABC}:\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC}=1:3$